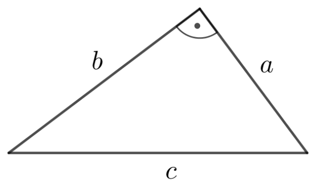
Wozu Termrechnung?

Vor mehr als 2000 Jahren schrieb Euklid sinngemäß:

„Am rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“

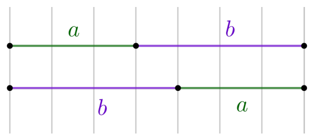


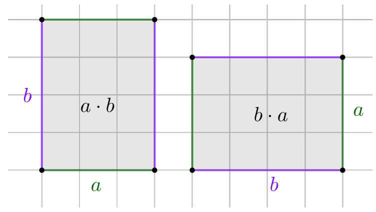
Mithilfe von Termen schreiben wir heutzutage kurz:

Kommutativgesetze

Für alle reellen Zahlen a, b und c gelten die **Kommutativgesetze**:

$$\boldsymbol{a+b=b+a} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{a\cdot b=b\cdot a}$$

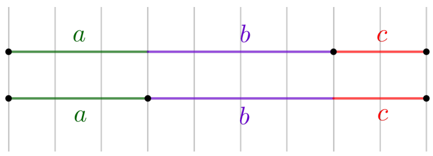


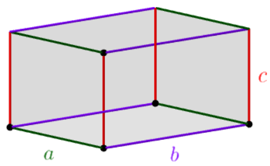


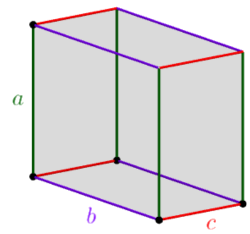
Assoziativgesetze

Für alle reellen Zahlen a und b gelten die **Assoziativgesetze**:

$$\boldsymbol{(a+b)+c=a+(b+c)} \qquad \text{und} \qquad \boldsymbol{(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)}$$



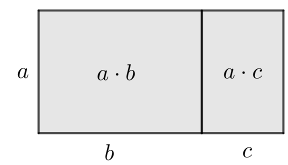




Distributivgesetz

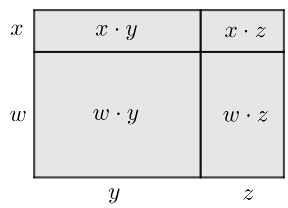
Für alle reellen Zahlen a, b und c gilt das **Distributivgesetz**:

$$\boldsymbol{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$$



Daraus folgt noch allgemeiner für alle reellen Zahlen w, x, y und z:

$$\boldsymbol{(w+x)\cdot(y+z)=w\cdot y+w\cdot z+x\cdot y+x\cdot z}$$



Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Koeffizienten

Die Terme $7\cdot x$ und $5\cdot x$ sind – abgesehen von ihren **Koeffizienten** – gleich.

Wir können also ihre Summe bzw. Differenz mit dem Distributivgesetz berechnen:

$$7\cdot x+5\cdot x=(7+5)\cdot x=12\cdot x \quad \text{bzw.} \quad 7\cdot x-5\cdot x=(7-5)\cdot x=2\cdot x$$

Terme – Addition und Subtraktion

Vereinfache so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für negative Zahlen gelten auch beim Rechnen mit Termen.

a) $7 \cdot x - 5 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y - 9 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x \cdot y$

b) $(x - 4 \cdot y) + (2 \cdot y - 5 \cdot x) - (7 \cdot x + 3 \cdot y)$

c) $5 \cdot x - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y - y \cdot x + 7 \cdot x$

Ausmultiplizieren

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

a) $(a + b) \cdot (a + b)$

b) $(a \cdot b) \cdot (a + b)$

c) $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b)$

d) $2 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y) + 3 \cdot x \cdot (y - 4)$

e) $(4 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (3 + x) - 5 \cdot (x + 3 \cdot y)$

f) $-3 \cdot (x - 2 \cdot y + 5) - (x + 2) \cdot (y - 3)$

Herausheben

Trage Terme so in die Kästchen ein, dass beide Seiten äquivalent sind.

a) $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x = x \cdot \underbrace{\left(\boxed{} - \boxed{} \right)}_{= \left(\frac{3 \cdot x^2}{x} - \frac{5 \cdot x}{x}\right)}$

b) $x^4 + x^3 - x^2 = x^2 \cdot \left(\boxed{} + \boxed{} - \boxed{} \right)$

c) $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 2 \cdot x \cdot \left(\boxed{} - \boxed{} + \boxed{} \right)$

Bruchterme kürzen

Kürze den Bruchterm so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für Brüche gelten auch für Bruchterme.

a) $\dfrac{10 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot z^2}{4 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z}$

b) $\dfrac{15 \cdot \smiley^2}{6 \cdot \smiley^5}$

c) $\dfrac{3 \cdot (4 \cdot x - 2)^3}{(4 \cdot x - 2)^2 \cdot 9}$

d) $\dfrac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2}{6 \cdot x}$

Zahlenrätsel

Suche dir deine Lieblingszahl aus und führe die folgenden Rechenschritte durch.
Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

i) Addiere 2 zu deiner Lieblingszahl.
ii) Multipliziere das Ergebnis mit 6.
iii) Subtrahiere 9 vom Ergebnis.
iv) Dividiere das Ergebnis durch 3.
v) Subtrahiere vom Ergebnis das Doppelte deiner Lieblingszahl.
vi) Addiere 41 zum Ergebnis.

Lieblingszahl $\square \xrightarrow{\text{i)}} \square \xrightarrow{\text{ii)}} \square \xrightarrow{\text{iii)}} \square \xrightarrow{\text{iv)}} \square \xrightarrow{\text{v)}} \square \xrightarrow{\text{vi)}} \boxed{42}$ Ergebnis

Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist x. Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit x durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

Bruchterme – Multiplikation und Division

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und kürze so weit wie möglich.

a) $\dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y} \cdot (10 \cdot x \cdot y^2)$

b) $\dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y} : (10 \cdot x \cdot y^2)$

c) $(10 \cdot x \cdot y^2) : \dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y}$

d) $\dfrac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \dfrac{6 \cdot x}{y^2}$

e) $\dfrac{3 \cdot x \cdot y}{2} : \dfrac{6 \cdot x}{y^2}$

Rechnen mit Einheiten

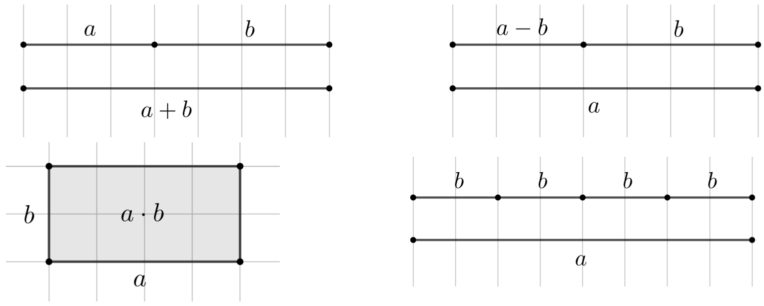
Wenn die Größen a und b jeweils die Einheit Zentimeter (cm) haben, dann hat die Größe …

1) $a+b$ die Einheit ☐.

2) $a-b$ die Einheit ☐.

3) $a \cdot b$ die Einheit ☐.

4) $\frac{a}{b}$ die Einheit ☐.



Rechnen mit Einheiten

Eine Formel zur Berechnung von x ist gegeben. Ermittle $[x]$, also die Einheit der Größe x.
Setze dazu die angegebenen Einheiten in die Formel ein, und vereinfache gegebenenfalls.
Alle in den Formeln vorkommenden Zahlen und die Konstante $\pi = 3{,}1415...$ haben jeweils die Einheit 1.

a) $x = \pi \cdot r^2$ mit $[r] = \mathrm{m}$ $\qquad [x] =$ ☐

b) $x = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ mit $[a] = [b] = [c] = \mathrm{cm}$ $\qquad [x] =$ ☐

c) $x = \rho \cdot V$ mit $[\rho] = \mathrm{g/cm^3}$ und $[V] = \mathrm{cm^3}$ $\qquad [x] =$ ☐

d) $x = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ mit $[v_1] = [v_2] = \mathrm{m/s}$ und $[t_1] = [t_2] = \mathrm{s}$ $\qquad [x] =$ ☐

e) $x = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ mit $[a] = \mathrm{m/s^2}$, $[v_0] = \mathrm{m/s}$ und $[t] = \mathrm{s}$ $\qquad [x] =$ ☐

Versteckte Klammern

Die beiden Terme $3 \cdot \dfrac{x+1}{2}$ und $\dfrac{3 \cdot x + 1}{2}$ sind *nicht* äquivalent. Zum Beispiel: $3 \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{3}{2}$ und $\frac{3 \cdot 0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.
Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen beim Rechnen nicht darauf vergessen:

$$3 \cdot \frac{x+1}{2} = 3 \cdot \frac{(x+1)}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{2} = \frac{3 \cdot x + 3}{2}$$

Bruchterm ± Bruchterm (Gleicher Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

a) $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x}$

b) $\dfrac{2 \cdot x - 3 \cdot y}{x \cdot y} - \dfrac{4 \cdot y + 2 \cdot x}{x \cdot y}$

c) $\dfrac{x+y}{x^2 - 1} - 2 \cdot \dfrac{x-y}{x^2-1}$

Bruch ± Bruch (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

a) $\dfrac{4 \cdot x - 1}{2} - \dfrac{2 \cdot x + 3}{5}$

b) $\dfrac{2 \cdot x - y}{3} - \dfrac{x + y}{6}$

Bruchterm ± Bruchterm (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

a) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{x}$

b) $\dfrac{3}{x} - \dfrac{5}{y}$

c) $\dfrac{4}{x+1} - \dfrac{2}{x}$

d) $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

e) $1 + \dfrac{1}{x^2 - 1}$

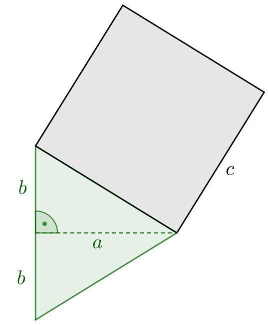
f) $\dfrac{3}{x \cdot (x-1)} - \dfrac{2}{x^2}$

Goldener Schnitt

Das rechts unten dargestellte Quadrat mit Seitenlänge c hat den Flächeninhalt F_Q.
Das gleichschenkelige Dreieck mit Basis $2 \cdot b$ und zugehöriger Höhe a hat den Flächeninhalt F_D.

Es gilt $F_Q : F_D = \sqrt{5} : 1\,.$ Das Quadrat ist also $\sqrt{5} = 2{,}236...$-Mal so groß wie das gleichschenkelige Dreieck.

Berechne: $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} =$



Das Verhältnis der Längen a und b ist in diesem Fall der Goldene Schnitt.