Stammfunktion

Zu einer gegebenen Funktion f suchen wir eine Funktion F, die $\boldsymbol{F' = f}$ erfüllt.
Eine solche Funktion $\boldsymbol{F}$ nennen wir **Stammfunktion von $\boldsymbol{f}$**.

Aufleiten

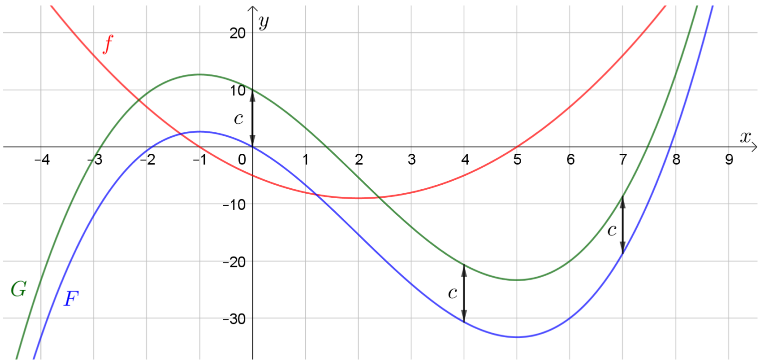
Ermittle eine Stammfunktion F von $f(x) = 8 \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - 42$.

$$F(x) = 2 \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{10} \cdot x^2 - 42 \cdot x$$

In Anlehnung zum „Ableiten" sprechen manche hier umgekehrt vom „Aufleiten". Hat f auch andere Stammfunktionen?

Vertikale Verschiebung

Zwei Funktionen F und G unterscheiden sich graphisch nur um eine Verschiebung in vertikaler Richtung.
Der Graph von G entsteht durch Verschiebung des Graphen von F um c Einheiten nach oben.



Es gilt also:

$$G(x) = F(x) + c$$

Beim vertikalen Verschieben bleibt die Steigung an jeder Stelle gleich.

Es gilt also:

$$G'(x) = F'(x)$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist also auch $G = F + c$ eine Stammfunktion von f.

Tatsächlich unterscheiden sich *alle* Stammfunktionen einer stetigen Funktion nur um vertikale Verschiebungen.

(4 | 2)

Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = 3 \cdot e^x - 8 \cdot x + 7$, die $F(4) = 2$ erfüllt.

$$F(x) = 3 \cdot e^x - 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x + c$$

$$F(4) = 2 \implies 3 \cdot e^4 - 4 \cdot 4^2 + 7 \cdot 4 + c = 2 \implies c = -125{,}7\ldots$$

$$F(x) = 3 \cdot e^x - 4 \cdot x^2 + 7 \cdot x - 125{,}7\ldots$$

Differentialgleichung

Ermittle jene Funktion f, die $f''(x) = 18 \cdot x$ sowie $f(0) = -2$ und $f(1) = 5$ erfüllt.

$$f'(x) = 9 \cdot x^2 + c$$

$$f(x) = 3 \cdot x^3 + c \cdot x + d$$

$$f(0) = -2 \implies d = -2$$

$$f(1) = 5 \implies 3 + c - 2 = 5 \implies c = 4$$

$$f(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x - 2$$

Stammfunktionen der elementaren Funktionen

Links sind die Regeln zur Berechnung von Stammfunktionen aus der Formelsammlung dargestellt. Überprüfe sie jeweils mit den Ableitungsregeln. Eine Erklärung für $f(x) = x^{-1}$ bzw. $f(x) = \tan(x)$ findest du unten.

	Funktion f	Stammfunktion F
1)	$f(x) = k$	$F(x) = k \cdot x$
2)	$f(x) = x^q$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
3)	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
4)	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
5)	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
6)	$f(x) = \log_a(x)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
7)	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
8)	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
9)	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

1) $F'(x) = k \cdot 1 = k$ ✓

2) $F'(x) = \dfrac{(q+1) \cdot x^q}{q+1} = x^q$ ✓

3) $F'(x) = e^x$ ✓

4) $F'(x) = \dfrac{a^x \cdot \ln(a)}{\ln(a)} = a^x$ ✓

5) $F'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$ ✓

6) $F'(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x) = \log_a(x)$ ✓

Arbeitsblatt– Logarithmusfunktionen

7) $F'(x) = -(-\cos(x)) = \sin(x)$ ✓

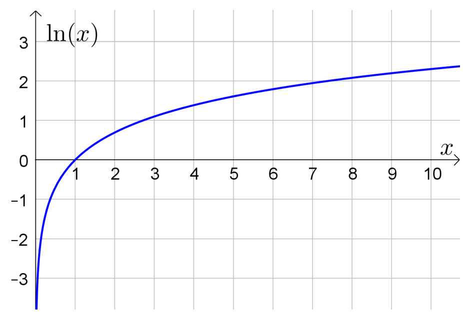
8) $F'(x) = \cos(x)$ ✓

Stammfunktion von $x \mapsto x^{-1}$

Erinnere dich, dass die Funktion F mit

$$F(x) = \ln(x) = \log_e(x)$$

nur für $x > 0$ definiert ist. e = 2,718 28... ist die Eulersche Zahl.



Es gilt $F(1) = \log_e(1) = 0$, weil $e^{\boxed{0}} = 1$.

Es gilt $F(e) = \log_e(e) = 1$, weil $e^{\boxed{1}} = e$.

Ihre Ableitungsfunktion ist $F'(x) = \dfrac{1}{x} = x^{-1}$. Mehr dazu erfährst du am AB – Natürlicher Logarithmus.

Die Funktion G mit $G(x) = \ln(-x)$ ist nur für $x < 0$ definiert. Berechne ihre Ableitungsfunktion:

$$G'(x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Die Funktion H mit $H(x) = \ln(|x|)$ ist für $x \neq 0$ definiert und eine Stammfunktion von $h(x) = \frac{1}{x}$.

Stammfunktion von $x \mapsto \tan(x)$

Rechne nach, dass $F(x) = -\ln(|\cos(x)|)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \tan(x)$ ist.

$$F'(x) = -\frac{1}{\cos(x)} \cdot (-\sin(x)) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x) \checkmark$$