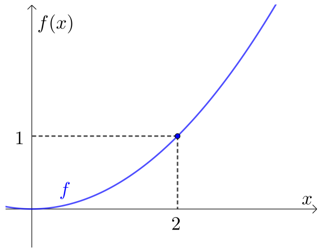
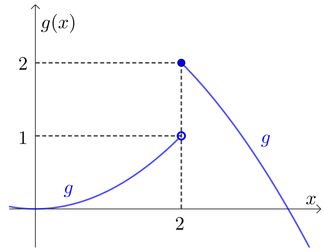
Grundvorstellung zur Stetigkeit

Stetigkeit: „*Kleine Veränderungen in x-Richtung bewirken kleine Veränderungen in y-Richtung.*“



Wie ändern sich links die Funktionswerte von f, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?

Wie ändern sich rechts die Funktionswerte von g, wenn wir uns *ein bisschen* von der Stelle $x = 2$ nach links oder nach rechts bewegen?



Stetigkeit

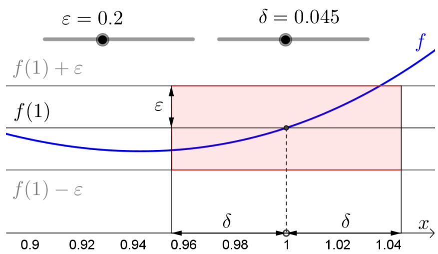
Die rechts dargestellte Funktion f ist stetig an der Stelle $x_0 = 1$. Deshalb können wir stets das folgende Spiel gewinnen:

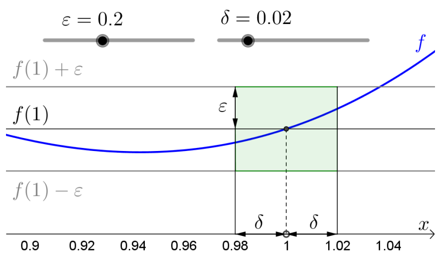
1) Unser Gegner legt eine Fehlertoleranz $\varepsilon > 0$ fest. In den Bildern rechts ist zum Beispiel $\varepsilon = 0{,}2$.

2) Danach wählen wir einen Spielraum $\delta > 0$. Im Bild oben ist $\delta = 0{,}045$. Im Bild unten ist $\delta = 0{,}02$.

3) Die Fehlertoleranz ε und der Spielraum δ legen – wie rechts dargestellt – ein Rechteck mit Mittelpunkt $(1 \mid f(1))$ fest.

4) Liegt an jeder Stelle x in $]1-\delta; 1+\delta[$ der zugehörige Funktionswert $f(x)$ in $]f(1)-\varepsilon; f(1)+\varepsilon[$, dann gewinnt unser Spielraum δ gegen die vorgegebene Fehlertoleranz ε.
In diesem Spiel gewinnt also $\delta = 0{,}02$ gegen $\varepsilon = 0{,}2$.





Wenn es an der Stelle x_0 zu jeder noch so kleinen positiven Fehlertoleranz ε einen passenden positiven Spielraum δ gibt, dann ist die Funktion an der Stelle x_0 stetig.

Stetigkeit

Die Funktion **f ist stetig an der Stelle x_0**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so gibt, dass

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \qquad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \forall x : |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle x in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ gilt.

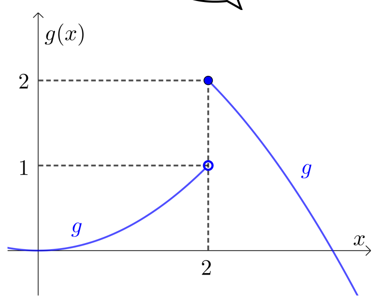
Wenn die Funktion f an jeder Stelle x_0 stetig ist, dann ist f eine **stetige Funktion**.

Sprungstelle

Die rechts dargestellte Funktion g ist stückweise definiert.

Es gilt: $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x < 2, \\ 3 - \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$

Die Funktion hat an der Stelle $x_0 = 2$ eine **Sprungstelle**.
Erkläre mit $\varepsilon = 0{,}5$, warum f an der Stelle 2 *nicht* stetig ist.



Für jede Stelle x in $]2-\delta; 2+\delta[$ müsste $1{,}5 < g(x) < 2{,}5$ gelten.
Aber jede noch so kleine Umgebung von 2 enthält Stellen x mit $g(x) < 1$.

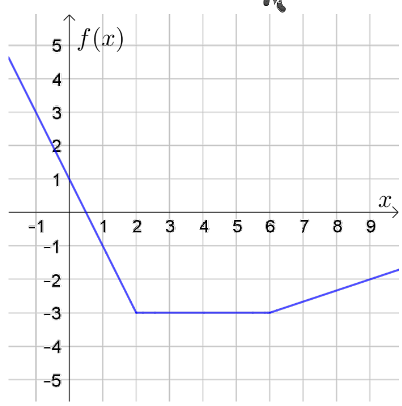
Wir sagen auch: Die Funktion ist **unstetig** an der Stelle $x_0 = 2$.

Stückweise definierte Funktion

Für die Funktion f gilt: $f(x) = \begin{cases} -2 \cdot x + a, & \text{falls } x < 2, \\ -3, & \text{falls } 2 \leq x \leq 6, \\ \frac{1}{3} \cdot x + b, & \text{falls } x > 6\,. \end{cases}$

1) Berechne die Zahlen a und b so, dass die Funktion f stetig ist.

2) Zeichne rechts den Funktionsgraphen ein.



$f(2) = -3 \implies -4 + a = -3 \implies a = 1$

$f(6) = -3 \implies 2 + b = -3 \implies b = -5$

Stetige Funktionen

Die **elementaren Funktionen** sind – überall dort, wo sie definiert sind – **stetig**. Dazu zählen:

1) Polynomfunktionen: $f(x) = 4 \cdot x^5 - 5 \cdot x^3 + 2 \cdot x + 42$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

2) Potenzfunktionen: $p(x) = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

3) Wurzelfunktionen: $w(x) = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5}$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

4) Exponentialfunktionen: $e(x) = 4^x$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

5) Logarithmusfunktionen: $\ell(x) = \log_4(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}^+$

6) Winkelfunktionen: $s(x) = \sin(x)$ mit Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

7) Arkusfunktionen: $a(x) = \arcsin(x)$ mit Definitionsmenge $D = [-1; 1]$

Wenn f und g stetige Funktionen sind, dann sind auch ihre **Summe**, ihre **Differenz**, ihr **Produkt**, ihr **Quotient** und ihre **Zusammensetzung** wieder im gesamten Definitionsbereich **stetig**.

Baukastenprinzip

Die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x}$ und g mit $g(x) = x - 4$ sind als elementare Funktionen stetig.

a) Die Funktion s mit $s(x) = \sqrt{x} + x - 4$ ist als Summe stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion s ist für alle $x \geq 0$ definiert.

b) Die Funktion d mit $d(x) = \sqrt{x} - x + 4$ ist als Differenz stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion d ist für alle $x \geq 0$ definiert.

c) Die Funktion p mit $p(x) = \sqrt{x} \cdot (x - 4)$ ist als Produkt stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion p ist für alle $x \geq 0$ definiert.

d) Die Funktion q mit $q(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x - 4}$ ist als Quotient stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion q ist für alle $x \geq 0$ außer $x = 4$ definiert.

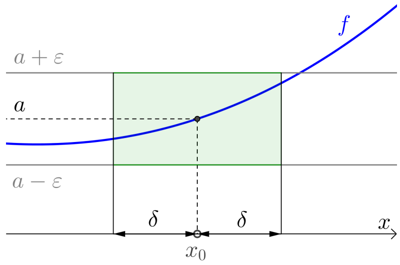
e) Die Funktion k mit $k(x) = \sqrt{x - 4}$ ist als Zusammensetzung stetiger Funktionen auch stetig.
Die Funktion k ist für alle $x \geq 4$ definiert.

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Für den **Grenzwert der Funktion f an der Stelle x_0** schreiben wir kurz: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Bei diesem Grenzwert betrachten wir die Funktionswerte an allen Stellen, die *ein bisschen* links bzw. rechts von x_0 liegen.

Wir untersuchen dann, wie sich die Funktionswerte verhalten, wenn wir uns der Stelle x_0 annähern.



Im Bild rechts gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, das heißt:

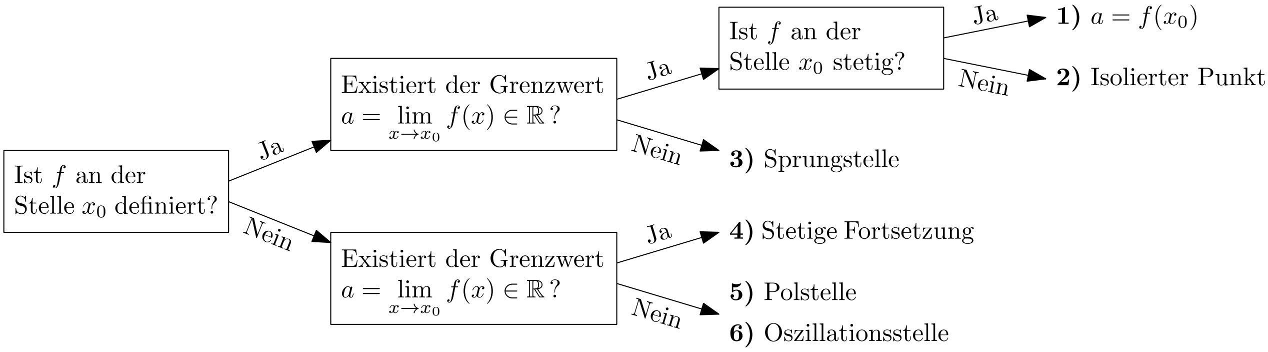
Für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zahl $\delta > 0$ so, dass

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon$$

für alle x in $]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$ mit $x \neq x_0$ gilt.

Die Funktion f ist genau dann **stetig an der Stelle x_0**, wenn $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt.

Beim Versuch, den Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ zu ermitteln, kann aber einiges mehr passieren:



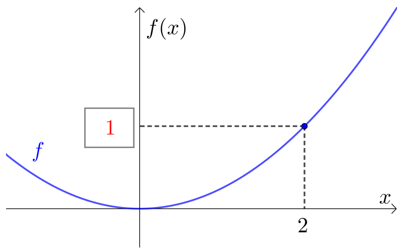
Auf dem restlichen Arbeitsblatt erfährst du mehr zu den Fällen **1)** – **6)**.

1) Stetigkeit – Grenzwert

Die rechts dargestellte Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{4}$ ist stetig an der Stelle $x_0 = 2$. Ermittle ihren Grenzwert an der Stelle 2:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2) = \frac{2^2}{4} = 1$$

Trage rechts die richtige Zahl in das Kästchen ein.



2) Isolierter Punkt

Rechts ist der Graph der folgenden Funktion f dargestellt:

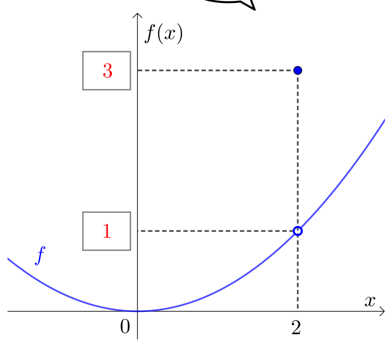
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \neq 2, \\ 3, & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existiert, aber f ist unstetig an der Stelle 2.

Der Funktionswert $f(2)$ an der untersuchten Stelle $x_0 = 2$ ist für die Stetigkeit wesentlich, aber *nicht* für den Grenzwert an der Stelle.

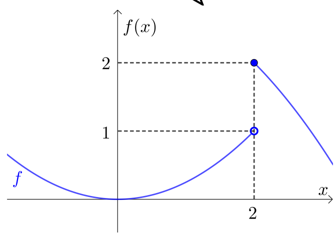
Für diese Funktion f gilt: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

Am Funktionsgraphen von f ist $(2 \mid 3)$ ein **isolierter Punkt**.



3) Sprungstelle

Rechts ist der Graph der folgenden Funktion f dargestellt:



$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x < 2, \\ 3 - \frac{x^2}{4}, & \text{falls } x \geq 2. \end{cases}$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existiert *nicht*.

Nähern wir uns von der linken Seite an, dann gilt: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 1$ **„Linksseitiger Grenzwert“**

Nähern wir uns von der rechten Seite an, dann gilt: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2$ **„Rechtsseitiger Grenzwert“**

4) Stetige Fortsetzung

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{2\cdot x^2 - 18}{x-3}$ ist an der Stelle $x_0 = 3$ *nicht* definiert.

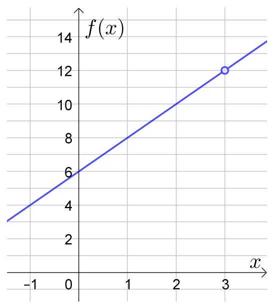
Beim Versuch für x den Wert 3 einzusetzen, erhalten wir einen unbestimmten Ausdruck $\dfrac{0}{0}$.

Es gilt: $f(x) = \dfrac{2\cdot(x^2-9)}{x-3} = \dfrac{2\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{x-3}$

Für $x \neq 3$ ist f also eine lineare Funktion mit $f(x) = 2\cdot x + 6$.

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von f ein.

Ermittle den Grenzwert an der Stelle $x_0 = 3$: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2\cdot 3 + 6 = 12$

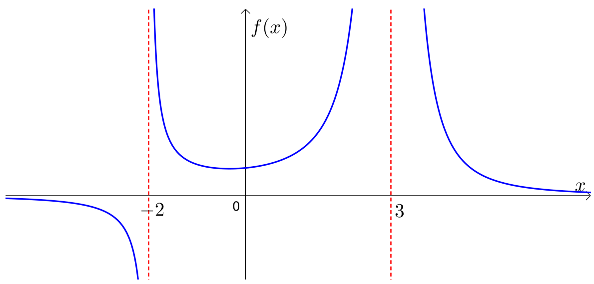


Die Funktion f hat eine **stetige Fortsetzung**: $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \neq 3, \\ 12, & \text{falls } x = 3. \end{cases}$

Dieser Fall mit unbestimmten Ausdrücken $\frac{0}{0}$ tritt zum Beispiel auf, wenn wir die Steigung von $g(x) = x^2$ an einer Stelle berechnen. Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Differentialquotient.

5) Polstellen

Die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{1}{(x+2)\cdot(x-3)^2}$ ist an den Stellen -2 und 3 *nicht* definiert.



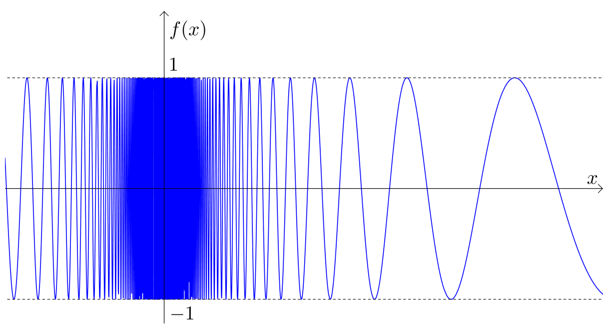
Was passiert mit den Funktionswerten, wenn wir uns diesen Stellen von links bzw. rechts annähern?

Solche Stellen heißen **Polstellen**.

Die strichlierten senkrechten Geraden heißen **vertikale Asymptoten**.

Skizziere rechts den Graphen von f.

6) Oszillationsstelle



Die Funktion f mit $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist an der Stelle $x_0 = 0$ *nicht* definiert.

Jede noch so kleine Umgebung von x_0 enthält jeden Funktionswert in $[-1; 1]$.

Es kann also kein Grenzwert an der Stelle x_0 existieren.

Eine solche Stelle heißt auch **Oszillationsstelle**.