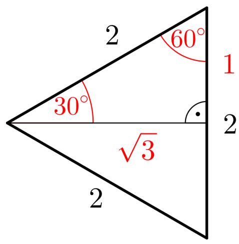
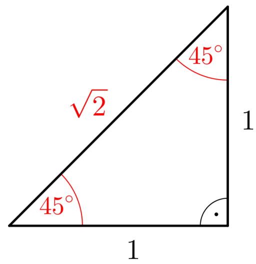
Winkelfunktionen



Gilt $\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha) + \sin(\beta)$ allgemein?
Berechne ohne Taschenrechner:

$$\sin(30° + 30°) = \sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (= 0{,}866...)$$

$$\sin(30°) + \sin(30°) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$



Summensätze für Winkelfunktionen

Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel α und β:

1) $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$ $\qquad \sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

2) $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$ $\qquad \cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

3) $\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$ $\qquad \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

$\sin(-\beta) = -\sin(\beta)$, $\cos(-\beta) = \cos(\beta)$, $\tan(-\beta) = -\tan(\beta)$

Doppelwinkelfunktionen

Zerlege die folgenden Ausdrücke mit den Summensätzen:

1) $\sin(2\cdot\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

2) $\cos(2\cdot\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

3) $\tan(2\cdot\alpha) = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Vermutung → Beweis

Die folgenden Ausdrücke kann man auch einfacher anschreiben.
Stelle jeweils mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf, und beweise sie mit den Summensätzen.

a) $\sin(2\cdot\alpha)\cdot\tan(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha)$ **b)** $\sin(\alpha+90°) - \sin(\alpha-90°) - 2\cdot\cos(\alpha)$

a)

$$\sin(2\cdot\alpha)\cdot\tan(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(\alpha)\cdot\tan(\alpha)}_{\sin(\alpha)} + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) =$$

$$= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

b)

$$\sin(\alpha+90°) = \sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(90°)}_{=0} + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\sin(90°)}_{=1} = \cos(\alpha)$$

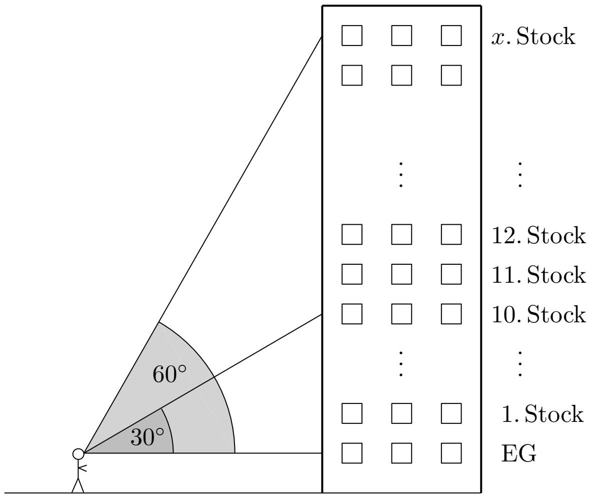
$$\sin(\alpha-90°) = \sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(-90°)}_{=0} + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\sin(-90°)}_{=-1} = -\cos(\alpha)$$

$$\Longrightarrow \sin(\alpha+90°) - \sin(\alpha-90°) - 2\cdot\cos(\alpha) = 0$$

Steigungswinkel verdoppeln

Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.
Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 30°.
Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 60°?

Alle Stockwerke sind gleich hoch.



h ... Höhe pro Stockwerk
d ... horizontale Entfernung vom Gebäude

$$\text{I}: \quad \tan(30°) = \frac{10 \cdot h}{d} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{h} = \frac{10}{\tan(30°)}$$

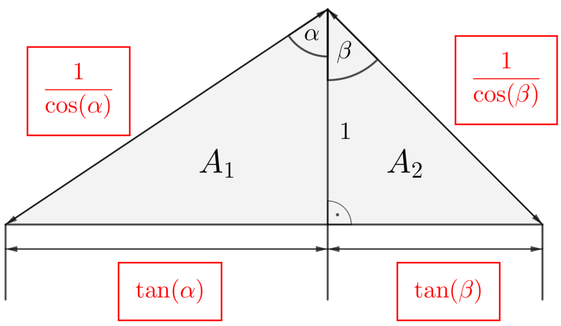
$$\text{II}: \quad \tan(60°) = \frac{x \cdot h}{d}$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{\tan(60°) \cdot d}{h} = \frac{\tan(60°) \cdot 10}{\tan(30°)} = 30$$

Du siehst den 30. Stock unter dem Höhenwinkel 60°.

Herleitung

Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel α und β.



1) Beschrifte die vier Längen links mit Hilfe von α und β.

2) Stelle mit Hilfe von α und β eine Formel für die Flächeninhalte A_1 und A_2 auf:

$$A_1 = \frac{\tan(\alpha)}{2} \qquad A_2 = \frac{\tan(\beta)}{2}$$

3) Stelle mit der trigonometrischen Flächenformel eine Formel für $A_1 + A_2$ auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}$$

4) Begründe mit **2)** und **3)** den Summensatz

$$\boldsymbol{\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)}$$

für spitze Winkel α und β.

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)}{2} + \frac{\tan(\beta)}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad \sin(\alpha + \beta) = \underbrace{\tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}_{=\sin(\alpha)} \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \underbrace{\tan(\beta) \cdot \cos(\beta)}_{=\sin(\beta)}$$