Natürliche Zahlen

Die Zahlen 0, 1, 2, 3, ... heißen **natürliche Zahlen**.
Die Menge aller natürlichen Zahlen $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ wird mit $\mathbb{N}$ abgekürzt.

Teiler

a und b sind natürliche Zahlen, wobei a nicht 0 ist. Kurz: $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

- Bleibt bei der ganzzahligen Division $b : a$ *kein* Rest, dann nennen wir a einen **Teiler** von b.
  Wir schreiben dafür kurz $\boldsymbol{a \mid b}$ und sagen: „a teilt b“ bzw. „b ist durch a teilbar“
- Bleibt bei der ganzzahligen Division $b : a$ ein Rest, dann ist a *kein* Teiler von b.
  Wir schreiben dafür kurz $a \nmid b$.

Teilbarkeit

Entscheide jeweils, ob $\mid$ oder $\nmid$ stimmt: **a)** $3 \mid 21$ **b)** $12 \nmid 4$ **c)** $1 \mid 8$ **d)** $4 \nmid 18$ **e)** $42 \mid 42$

Primzahlen

Jede natürliche Zahl, die *genau* zwei Teiler hat, heißt **Primzahl**. Teiler sind dann die Zahl selbst und 1.

Ermittle die 10 kleinsten Primzahlen: $\mathbb{P} = \left\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots\right\}$

Die 3 Punkte (...) deuten an, dass es *unendlich* viele Primzahlen gibt. Es ist *nicht* offensichtlich, dass das stimmt.
Die „große“ Zahl 424243 könnte zum Beispiel viele verschiedene Teiler haben. Tatsächlich hat sie aber nur 2 Teiler.
Euklid fand vor mehr als 2000 Jahren einen Beweis dafür, dass es tatsächlich unendlich viele Primzahlen gibt.
Die größte *bekannte* Primzahl (Stand: 08/2023) ist $2^{82\,589\,933} - 1$. Sie hat 24 862 048 Ziffern und füllt damit rund 25 000 Buchseiten.
Es wird laufend nach neuen großen Primzahlen gesucht. Diese werden bei modernen Verschlüsselungsverfahren eingesetzt.

Teilbarkeitsregeln

Mithilfe der **Teilbarkeitsregeln** können wir für einige kleine Primzahlen schneller entscheiden, ob sie eine gegebene (große) Zahl teilen:

- **Teilbarkeit durch 2**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
  Zum Beispiel: **a)** $2 \mid 139566345\mathbf{8}$ **b)** $2 \nmid 475682348\mathbf{7}$
- **Teilbarkeit durch 3**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
  Zum Beispiel: **a)** $3 \mid 6435$, weil $3 \mid 18$ **b)** $3 \nmid 728$, weil $3 \nmid 17$
- **Teilbarkeit durch 5**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die Einerziffer 0 oder 5 ist.
  Zum Beispiel: **a)** $5 \mid 75463410\mathbf{5}$ **b)** $5 \nmid 542167\mathbf{1}$

Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.

Zum Beispiel: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ oder $23\,061\,987 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 439 \cdot 449$

Diese **Primfaktorzerlegung** ist für jede Zahl eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Primfaktorzerlegung MmF

Mit dem folgenden Verfahren können wir eine Zerlegung in Primfaktoren ermitteln:

1) Dividiere so oft wie möglich durch 2 ohne Rest.

2) Dividiere so oft wie möglich durch 3 ohne Rest.

3) Dividiere so oft wie möglich durch 5 ohne Rest.

4) Setze mit den weiteren Primzahlen fort, bis das Ergebnis 1 ist.

$$\begin{array}{r|l}
150 & 2 \\
75 & 3 \\
25 & 5 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}$$

$2 \mid 150$	$150 = 2 \cdot 75$
$2 \nmid 75$, aber $3 \mid 75$	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 25$
$3 \nmid 25$, aber $5 \mid 25$	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
$5 \mid 5$	

Die Primfaktorzerlegung von 150 mit aufsteigend sortierten Primfaktoren ist also $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Primfaktorzerlegung MmF

Schreibe die Zahlen 180, 350 und 495 jeweils als Produkt von Primfaktoren.

$$\begin{array}{r|l}
180 & 2 \\
90 & 2 \\
45 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
350 & 2 \\
175 & 5 \\
35 & 5 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
495 & 3 \\
165 & 3 \\
55 & 5 \\
11 & 11 \\
1 &
\end{array}$$

$\Longrightarrow\ 180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$ $\qquad \Longrightarrow\ 350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ $\qquad \Longrightarrow\ 495 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$

Alle Teiler MmF

Welche Teiler hat die Zahl 150? Du könntest alle Zahlen von 1 bis 150 durchprobieren. Das dauert aber lange.

Die Primfaktorzerlegung $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ legt alle Teiler von 150 fest.

Nämlich jede Auswahl von Primfaktoren liefert einen Teiler.

Zum Beispiel ist $2 \cdot 3 = 6$ ein Teiler von 150, weil $150 : (2 \cdot 3) = 5 \cdot 5$ ohne Rest.

i) Die Zahlen 1 und 150 sind jedenfalls Teiler.

ii) Welche Primzahlen sind Teiler von 150? Liste sie mithilfe der Primfaktorzerlegung (PFZ) auf.
2, 3, 5

Die Primfaktorzerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren *eindeutig*. Deshalb kann zum Beispiel die Primzahl 13 kein Teiler von 150 sein, denn sonst müsste 13 in der Primfaktorzerlegung von 150 vorkommen.

iii) Welche Produkte von 2 Primfaktoren sind Teiler von 150? Liste sie mithilfe der PFZ auf.
$2 \cdot 3 = 6 \quad 2 \cdot 5 = 10 \quad 3 \cdot 5 = 15 \quad 5 \cdot 5 = 25$

iv) Welche Produkte von 3 Primfaktoren sind Teiler von 150? Liste sie mithilfe der PFZ auf.
$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 \quad 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50 \quad 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$

Die Zahl 150 hat also insgesamt 12 Teiler. Liste sie in aufsteigend sortierter Reihenfolge auf:

1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150

Größter gemeinsamer Teiler MmF

Der **größte gemeinsame Teiler** zweier natürlichen Zahlen m und n ist die *größte* natürliche Zahl, die *beide* Zahlen m und n teilt. Wir schreiben dafür kurz: $\mathbf{ggT}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$

Wenn $\mathbf{ggT}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$ gilt, dann sagen wir auch: „m und n sind **teilerfremd**“.

ggT berechnen

Was ist der größte gemeinsame Teiler von 270 und 315? Alle Zahlen von 1 bis 270 durchzuprobieren dauert lange.
Aus den Primfaktorzerlegungen von 270 und 315 können wir gemeinsame Teiler ablesen:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Longrightarrow 315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Jede Auswahl von Primfaktoren liefert einen Teiler. $3 \cdot 3 \cdot 5$ ist also ein Teiler von 270 und ein Teiler von 315. Wegen der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung gibt es ansonsten keine gemeinsamen Primfaktoren.

Der größte gemeinsame Teiler von 270 und 315 ist also $\operatorname{ggT}(270, 315) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

ggT berechnen

Berechne $\operatorname{ggT}(180, 210)$, $\operatorname{ggT}(180, 420)$ und $\operatorname{ggT}(180, 210, 420)$.

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\Longrightarrow 210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\Longrightarrow 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$\operatorname{ggT}(180, 210) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ $\quad \operatorname{ggT}(180, 420) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$ $\quad \operatorname{ggT}(180, 210, 420) = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Eine effiziente Methode zur Bestimmung des ggT *ohne* Berechnung der Primfaktorzerlegungen ist der Euklidische Algorithmus.

Vielfache

Wenn a ein Teiler von b ist, dann nennen wir umgekehrt b ein **Vielfaches** von a.
Die Vielfachen von 42 sind zum Beispiel $\underbrace{42}_{=42 \cdot 1}, \underbrace{84}_{=42 \cdot 2}, \underbrace{126}_{=42 \cdot 3}, \underbrace{168}_{=42 \cdot 4}, \underbrace{210}_{=42 \cdot 5} \ldots$

Kleinstes gemeinsames Vielfache

Das **kleinste gemeinsame Vielfache** zweier natürlichen Zahlen m und n ist die *kleinste* natürliche Zahl, die ein Vielfaches von *beiden* Zahlen m und n ist. Wir schreiben dafür kurz: $\mathbf{kgV}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$

Zum Beispiel: Vielfache von 4: $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \ldots\}$
Vielfache von 6: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \ldots\}$
Gemeinsame Vielfache von 4 und 6: $\{12, 24, 36, \ldots\} \Longrightarrow \operatorname{kgV}(4, 6) = 12$

kgV berechnen

Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 420 und 450?
Die Zahl $420 \cdot 450 = 189\,000$ ist zwar ein gemeinsames Vielfaches von 420 und 450, aber nicht das *kleinste* gemeinsame Vielfache.
Wir ermitteln die Primfaktorzerlegung von 420 und von 450:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Longrightarrow 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\Longrightarrow 450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Eine Zahl ist ein Vielfaches von 420, wenn ihre PFZ *zumindest* die Primfaktoren $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ enthält.

Eine Zahl ist ein Vielfaches von 450, wenn ihre PFZ *zumindest* die Primfaktoren $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ enthält.

Die Zahl $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ ist deshalb die *kleinste* natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 420 und 450 ist.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 420 und 450 ist also $\operatorname{kgV}(420, 450) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 6300$.

kgV berechnen

Berechne $\mathrm{kgV}(60,63)$, $\mathrm{kgV}(60,294)$ und $\mathrm{kgV}(60,63,294)$.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 294 & 2 \\ 147 & 3 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\Longrightarrow 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$

$\Longrightarrow 63 = 3 \cdot 3 \cdot 7$

$\Longrightarrow 294 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$

$\mathrm{kgV}(60,63) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$ $\quad$ $\mathrm{kgV}(60,294) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 2940$

$\mathrm{kgV}(60,63,294) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 = 8820$

$\mathrm{ggT}(m,n) \cdot \mathrm{kgV}(m,n) = m \cdot n$

1) Berechne $\mathrm{kgV}(42,140)$ und $\mathrm{ggT}(42,140)$.

$$\begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 140 & 2 \\ 70 & 2 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$\Longrightarrow 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$

$\Longrightarrow 140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$

$\mathrm{ggT}(42,140) = 2 \cdot 7 = 14$ $\quad$ $\mathrm{kgV}(42,140) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 420$

2) Berechne: $\mathrm{ggT}(42,140) \cdot \mathrm{kgV}(42,140) = 5880$ bzw. $42 \cdot 140 = 5880$

Was fällt dir auf? Kannst du begründen, warum $\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b$ gilt? Gilt auch $\mathrm{ggT}(a,b,c) \cdot \mathrm{kgV}(a,b,c) = a \cdot b \cdot c$?

Sieb des Eratosthenes

Das **Sieb des Eratosthenes** ist ein Verfahren, um alle Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl zu ermitteln. Verwende das Sieb des Eratosthenes, um alle Primzahlen bis 100 zu ermitteln:

1) Die Zahl 1 hat nur einen Teiler.
Sie ist also keine Primzahl. Streiche die Zahl 1 rechts durch.

2) Die Zahl 2 hat genau zwei Teiler.
Sie ist also eine Primzahl. Kreise die Zahl 2 rechts ein.
Alle Vielfachen von 2 sind keine Primzahlen.
Streiche sie durch.

3) Suche die kleinste Zahl, die weder durchgestrichen noch eingekreist ist. Diese Zahl ist ein Primzahl. Kreise sie ein.
Alle Vielfachen dieser Zahl sind keine Primzahlen.
Streiche sie durch. Wiederhole Schritt **3)**, bis alle Zahlen entweder eingekreist oder durchgestrichen sind.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Kannst du erklären, warum jede eingekreiste Zahl *sicher* eine Primzahl ist?