Teiler

a und b sind natürliche Zahlen mit $a \neq 0$. $a, b \in \mathbb{N}$, $a \neq 0$

Bleibt bei der Division $b : a$ *kein* Rest, dann nennen wir a einen **Teiler** von b.

Wir schreiben dafür kurz $\boldsymbol{a \mid b}$. Sprechweisen: „a teilt b“, „b ist durch a teilbar“

Bleibt bei der Division $b : a$ ein positiver Rest, dann ist a kein Teiler von b, und wir schreiben $a \nmid b$.

Teilbarkeit

Entscheide jeweils, ob $\mid$ oder $\nmid$ stimmt: **a)** $3 \,\square\, 21$ **b)** $12 \,\square\, 4$ **c)** $1 \,\square\, 8$ **d)** $4 \,\square\, 18$ **e)** $42 \,\square\, 42$

Primzahlen

Jede natürliche Zahl, die *genau* zwei Teiler hat, heißt **Primzahl**.

Ermittle die 10 kleinsten Primzahlen: $\mathbb{P} = \{\square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \square, \dots\}$

Die 3 Punkte (...) deuten an, dass es *unendlich* viele Primzahlen gibt. Es ist *nicht* offensichtlich, dass das stimmt.

Die Zahl 424243 könnte zum Beispiel viele verschiedene Teiler haben. Tatsächlich hat sie aber nur 2 Teiler.

Euklid fand vor mehr als 2000 Jahren einen Beweis dafür, dass es tatsächlich unendlich viele Primzahlen gibt.

Die größte *bekannte* Primzahl (Stand: 2018) ist $2^{82\,589\,933} - 1$. Sie hat 24 862 048 Ziffern und füllt damit rund 25 000 Buchseiten.

Teilbarkeitsregeln

Mit Hilfe der **Teilbarkeitsregeln** können wir für bestimmte Primzahlen schneller entscheiden, ob sie eine gegebene (große) Zahl teilen: Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Kongruenz und Restklassen.

- **Teilbarkeit durch 2**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer 0, 2, 4, 6 oder 8 ist.
  Zum Beispiel: **a)** $2 \,\square\, 139566345\mathbf{8}$ **b)** $2 \,\square\, 475682348\mathbf{7}$
- **Teilbarkeit durch 3**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 3 teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3 teilbar ist.
  Zum Beispiel: **a)** $3 \,\square\, 6435$, weil $3 \,\square\, \square$. **b)** $3 \,\square\, 728$, weil $3 \,\square\, \square$.
- **Teilbarkeit durch 5**:
  Eine natürliche Zahl ist genau dann durch 5 teilbar, wenn die Einerziffer 0 oder 5 ist.
  Zum Beispiel: **a)** $5 \,\square\, 75463410\mathbf{5}$ **b)** $5 \,\square\, 542167\mathbf{1}$

Primfaktorzerlegung

Jede natürliche Zahl $n > 1$ kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.

Zum Beispiel: $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ oder $23\,061\,987 = 3 \cdot 3 \cdot 13 \cdot 439 \cdot 449$

Diese Zerlegung ist für jede Zahl eindeutig bis auf die Reihenfolge der Faktoren.

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Fundamentalsatz der Arithmetik.

Primfaktorzerlegung

Mit dem folgenden Verfahren können wir eine Zerlegung in Primfaktoren ermitteln:

1) Dividiere so oft wie möglich durch 2 ohne Rest.

2) Dividiere so oft wie möglich durch 3 ohne Rest.

3) Dividiere so oft wie möglich durch 5 ohne Rest.

4) Setze mit den weiteren Primzahlen fort, bis das Ergebnis 1 ist.

150	2	$2 \mid 150$	$150 = 2 \cdot 75$
75	3	$2 \nmid 75$, aber $3 \mid 75$	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 25$
25	5	$3 \nmid 25$, aber $5 \mid 25$	$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
5	5	$5 \mid 5$	
1			

Eine Primfaktorzerlegung von 150 ist also $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

Primfaktorzerlegung

Schreibe die Zahlen 180, 350 und 495 jeweils als Produkt von Primfaktoren.

Alle Teiler

Wie viele Teiler hat die Zahl 150? Du könntest alle Zahlen von 1 bis 150 durchprobieren. Das dauert aber lange.
Die Zahlen 1 und 150 sind Teiler von 150.
Um die anderen Teiler zu ermitteln, zerlegen wir 150 in Primfaktoren: $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
Welche Primzahlen sind Teiler von 150? Die Primfaktorzerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig.

Welche Produkte von 2 Primzahlen sind Teiler von 150?

Welche Produkte von 3 Primzahlen sind Teiler von 150?

150 hat also insgesamt ____ Teiler. Jede Auswahl von Primfaktoren liefert einen Teiler.

Teileranzahl

Für jede natürliche Zahl n kürzen wir mit $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n ab. Zum Beispiel: $d(150) = 12$
Wenn p eine Primzahl ist, dann gilt:

$$d(p) = \_\_\_\_ \qquad d(p \cdot p) = \_\_\_\_ \qquad d(p \cdot p \cdot p) = \_\_\_\_ \qquad d(p^k) = d(\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{k \text{ Faktoren}}) = \_\_\_\_\_\_$$

Wenn die natürlichen Zahlen m und n *keinen* gemeinsamen Teiler außer 1 haben, dann gilt:

$$d(m \cdot n) = d(m) \cdot d(n)$$

Um einen Teiler von $m \cdot n$ zu erhalten, kannst du *jeden* Teiler von m mit *jedem* Teiler von n multiplizieren. Dafür gibt es $d(m) \cdot d(n)$ Möglichkeiten. Jeder Teiler von $m \cdot n$ kann eindeutig in einen Teiler von m und einen Teiler von n zerlegt werden.

Aus der Primfaktorzerlegung $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ können wir damit schneller die Teileranzahl berechnen:

$$d(150) = d(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5) = d(2) \cdot d(3 \cdot 5 \cdot 5) = \underbrace{d(2)}_{\boxed{}} \cdot \underbrace{d(3)}_{\boxed{}} \cdot \underbrace{d(5 \cdot 5)}_{\boxed{}} = \_\_\_\_\_\_$$

Größter gemeinsamer Teiler

Der **größte gemeinsame Teiler** zweier natürlichen Zahlen m und n ist die größte natürliche Zahl, die beide Zahlen m und n teilt. Wir schreiben dafür kurz $\mathbf{ggT}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$.
Wenn $\mathbf{ggT}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}) = \mathbf{1}$ gilt, dann sagen wir auch: „m und n sind **teilerfremd**“.

ggT berechnen

Was ist der größte gemeinsame Teiler von 270 und 315?

Du könntest alle Zahlen von 1 bis 270 durchprobieren. Das dauert aber lange.

Aus den Primfaktorzerlegungen von 270 und 315 können wir gemeinsame Teiler ablesen:

$$\begin{array}{r|l} 270 & 2 \\ 135 & 3 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 315 & 3 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\implies 270 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$$

$$\implies 315 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Jede Auswahl von Primfaktoren liefert einen Teiler.
$3 \cdot 3 \cdot 5$ ist also ein Teiler von 270 und ein Teiler von 315.
Ansonsten gibt es keine gemeinsamen Primfaktoren.

Der größte gemeinsame Teiler von 270 und 315 ist also $\operatorname{ggT}(270, 315) = 3 \cdot 3 \cdot 5 = 45$.

ggT berechnen

Berechne $\operatorname{ggT}(180, 210)$, $\operatorname{ggT}(180, 420)$ und den größten gemeinsamen Teiler von 180, 210 und 420.

$\operatorname{ggT}(180, 210, 420)$

Kleinstes gemeinsames Vielfache

Wenn a ein Teiler von b ist, dann nennen wir umgekehrt b ein **Vielfaches** von a.
Das **kleinste gemeinsame Vielfache** zweier natürlichen Zahlen m und n ist die kleinste natürliche Zahl, die ein Vielfaches von beiden Zahlen m und n ist. Wir schreiben dafür kurz $\mathbf{kgV}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$.

Zum Beispiel: Vielfache von 4: $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, \dots\}$
Vielfache von 6: $\{6, 12, 18, 24, 30, 36, \dots\}$

Gemeinsame Vielfache von 4 und 6: $\{12, 24, 36, \dots\}$
$\implies \operatorname{kgV}(4, 6) = 12$

kgV berechnen

Was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 420 und 450? Wir berechnen die Primfaktorzerlegungen:

$$\begin{array}{r|l} 420 & 2 \\ 210 & 2 \\ 105 & 3 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\implies 420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

$$\implies 450 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$$

Eine Zahl ist ein Vielfaches von 420, wenn ihre PFZ *zumindest* die Faktoren $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ enthält.

Eine Zahl ist ein Vielfaches von 450, wenn ihre PFZ *zumindest* die Faktoren $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ enthält.

Die Zahl $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$ ist die *kleinste* natürliche Zahl, die ein Vielfaches von 420 und von 450 ist.

Das kleinste gemeinsame Vielfache von 420 und 450 ist also $\operatorname{kgV}(420, 450) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 6300$.

kgV berechnen

Berechne kgV$(60, 63)$, kgV$(60, 294)$ und das kleinste gemeinsame Vielfache von 60, 63 und 294.

kgV$(60, 63, 294)$

ggT$(m, n) \cdot$ kgV$(m, n) = m \cdot n$

Berechne kgV$(42, 140)$ und ggT$(42, 140)$.

ggT$(42, 70) \cdot$ kgV$(42, 70) =$ ______ $42 \cdot 140 =$ ______

Warum gilt ggT$(m, n) \cdot$ kgV$(m, n) = m \cdot n$?

Sieb des Eratosthenes

Das **Sieb des Eratosthenes** ist ein Verfahren, um alle Primzahlen bis zu einer bestimmten Zahl zu ermitteln. Verwende das Sieb des Eratosthenes, um alle Primzahlen bis 100 zu ermitteln:

1) Die Zahl 1 hat nur einen Teiler.
Sie ist also keine Primzahl. Streiche die Zahl 1 rechts durch.

2) Die Zahl 2 hat genau zwei Teiler.
Sie ist also eine Primzahl. Kreise die Zahl 2 rechts ein.
Alle Vielfachen von 2 sind keine Primzahlen.
Streiche sie durch.

3) Suche die kleinste Zahl, die weder durchgestrichen noch eingekreist ist. Diese Zahl ist ein Primzahl. Kreise sie ein.
Alle Vielfachen dieser Zahl sind keine Primzahlen.
Streiche sie durch.
Wiederhole Schritt **3)**, bis alle Zahlen markiert sind.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Kannst du erklären, warum jede eingekreiste Zahl *sicher* eine Primzahl ist?