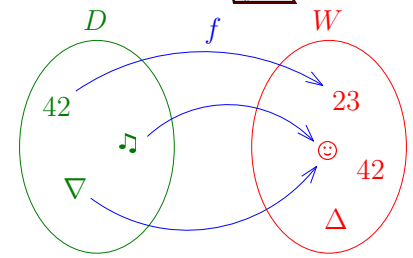


Eine **Funktion** f ist eine Vorschrift, die *jedem* Element ihrer **Definitionsmenge** D *genau* ein Element aus ihrer **Wertemenge** W zuordnet.

Kurz schreiben wir dafür auch: $f: D \rightarrow W$

Wenn f dem Element 42 das Element 23 zuordnet, schreiben wir dafür kurz: $f(42) = 23$



Sprechweisen: „Der **Funktionswert** von 42 ist 23.“ bzw. „ f von 42 ist gleich 23.“

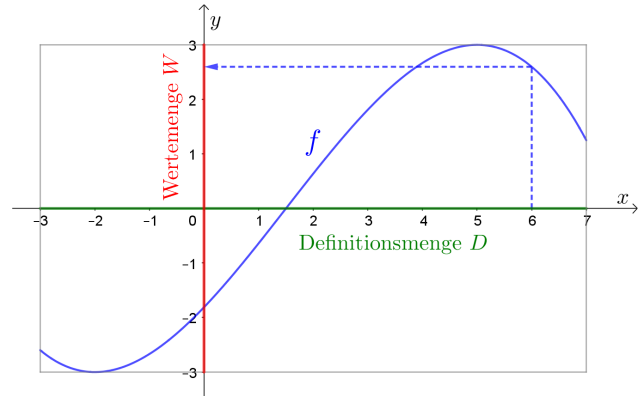
Die **Definitionsmenge** und **Wertemenge** können auch *unendlich* viele Elementen enthalten.

Zum Beispiel: $D = [-3; 7]$ und $W = [-3; 3]$

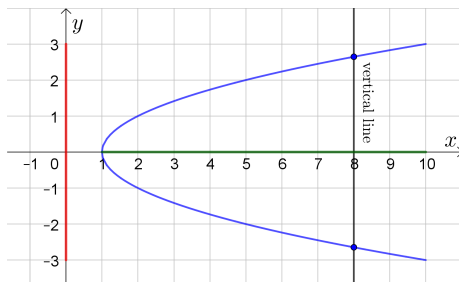
Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

$$f(6) = 2,597\dots$$

Die eingezeichnete Kurve heißt **Funktionsgraph**.



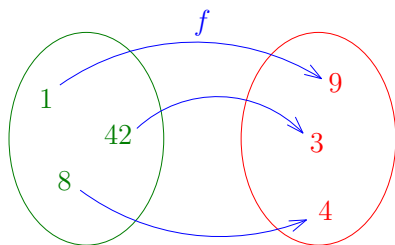
Begründe warum, die dargestellte Kurve *nicht* der Graph einer Funktion $f: [1; 10] \rightarrow [-3; 3]$ ist.



Es gibt eine Zahl in der Definitionsmenge $[1; 10]$, der *nicht* genau ein Wert zugeordnet wird.

Tatsächlich werden jeder Zahl in $]1; 10]$ zwei Werte zugeordnet.

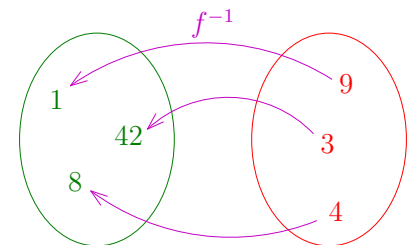
Links ist eine Funktion $f: \{1, 8, 42\} \rightarrow \{3, 4, 9\}$ dargestellt. Rechts haben wir die Pfeile umgedreht. Dann wird jedem Element in $\{3, 4, 9\}$ *genau ein* Element in $\{1, 8, 42\}$ zugeordnet.



Diese umgekehrte Zuordnung

$$f^{-1}: \{3, 4, 9\} \rightarrow \{1, 8, 42\}$$

heißt **Umkehrfunktion** von f .



Die **Funktion** f hat die Definitionsmenge $\{1, 8, 42\}$ und die Wertemenge $\{3, 4, 9\}$.

Ihre **Umkehrfunktion** f^{-1} hat umgekehrt die Definitionsmenge $\{3, 4, 9\}$ und die Wertemenge $\{1, 8, 42\}$.

Vertauschen wir die Zeilen in der Wertetabelle von f , erhalten wir die Wertetabelle von f^{-1} .

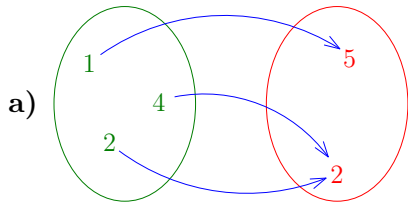
☺	1	8	42
$f(\text{☺})$	9	4	3

★	9	4	3
$f^{-1}(\text{★})$	1	8	42

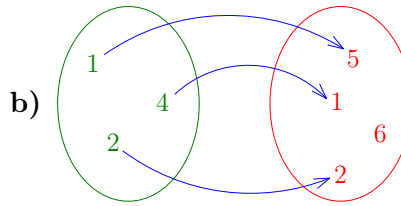
Funktionen ohne Umkehrfunktion



Die dargestellten Funktionen haben beide *keine* Umkehrfunktion. Warum?



Es zeigt mehr als ein Pfeil auf den Wert 2.



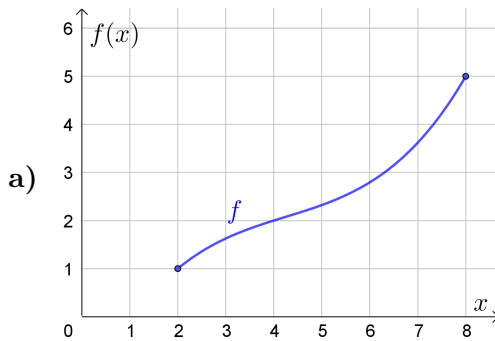
Es zeigt kein Pfeil auf den Wert 6.

Horizontal line test

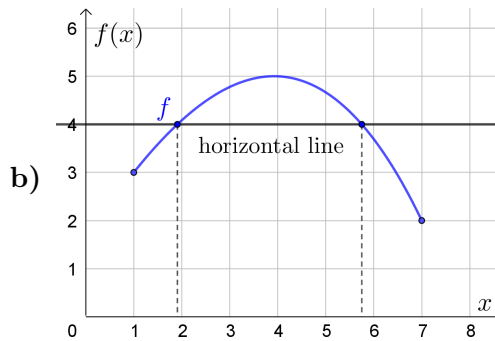


Der Graph einer Funktion $f: D \rightarrow W$ ist gegeben.

- 1) Ermittle die Definitionsmenge D von f .
- 2) Ermittle die kleinstmögliche Wertemenge W von f .
- 3) Hat die Funktion $f: D \rightarrow W$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}: W \rightarrow D$? Begründe deine Antwort.



- 1) $D = [2; 8]$
- 2) $W = [1; 5]$
- 3) Ja, weil jeder Funktionswert in W genau eine zugehörige Stelle in D hat.



- 1) $D = [1; 7]$
- 2) $W = [2; 5]$
- 3) Nein, weil zum Beispiel der Funktionswert 4 zwei zugehörige Stellen in D hat.

Spiegelung an 1. Mediane

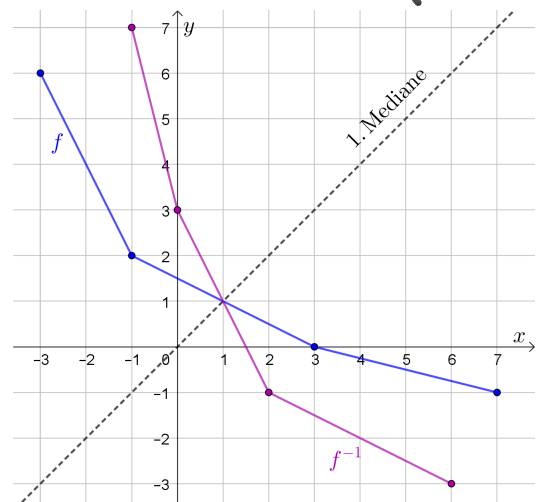


$f: [-3; 7] \rightarrow [-1; 6]$ ist eine stückweise lineare Funktion. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

Die Funktion f hat eine Umkehrfunktion f^{-1} .

Wenn ein Punkt $(a | b)$ am Funktionsgraphen von f liegt, dann liegt der Punkt $(b | a)$ am Funktionsgraphen von f^{-1} . Ihre Graphen sind deshalb an der **1. Mediane** gespiegelt.

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von f^{-1} ein.





Du lässt einen Bleistift zum Zeitpunkt $t = 0$ s aus 2 Meter Höhe über dem Boden fallen.
Die Flughöhe des Bleistifts kann näherungsweise durch die folgende Funktion h modelliert werden:

$$h(t) = 2 - 5 \cdot t^2$$

t ... Zeit in Sekunden

$h(t)$... Höhe des Bleistifts über dem Boden in Metern

- 1) Wie lang dauert es, bis der Bleistift am Boden aufschlägt?
Gib den größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich D dieser Funktion h an.

$$h(t) = 0 \iff 5 \cdot t^2 = 2 \iff t^2 = \frac{2}{5} \stackrel{t \geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{2}{5}} = 0,632\dots$$

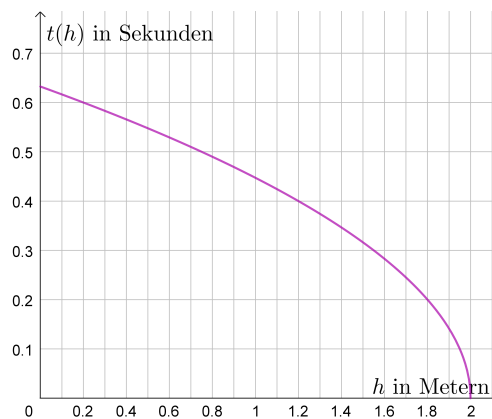
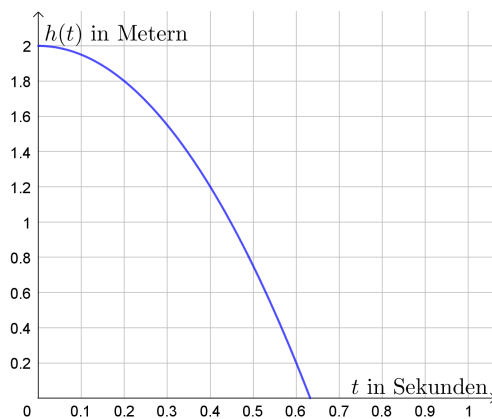
Der Bleistift schlägt nach 0,632... s am Boden auf. $D = [0; 0,632\dots]$

- 2) Wie lang dauert es, bis sich der Bleistift in 1 Meter Höhe über dem Boden befindet?

$$h(t) = 1 \iff 5 \cdot t^2 = 1 \iff t^2 = \frac{1}{5} \stackrel{t \geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{1}{5}} = 0,447\dots$$

Der Bleistift befindet sich nach 0,447... s noch 1 Meter über dem Boden.

Die Funktion h ordnet jedem Zeitpunkt t in D die entsprechende Höhe $h(t)$ in $[0 \text{ m}; 2 \text{ m}]$ zu.
Die Umkehrfunktion t ordnet jeder Höhe h in $[0 \text{ m}; 2 \text{ m}]$ den entsprechenden Zeitpunkt $t(h)$ in D zu.
Die Graphen der beiden Funktionen sind dargestellt:



Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind (wie immer) auch in dieser Aufgabe an der 1. Mediane gespiegelt. Da auf den Achsen aber *verschiedene* Einheiten sind (Sekunden bzw. Meter), zeichnen wir die Graphen in *verschiedene* Koordinatensysteme ein.

- 3) Forme die Gleichung $h = 2 - 5 \cdot t^2$ nach t um.

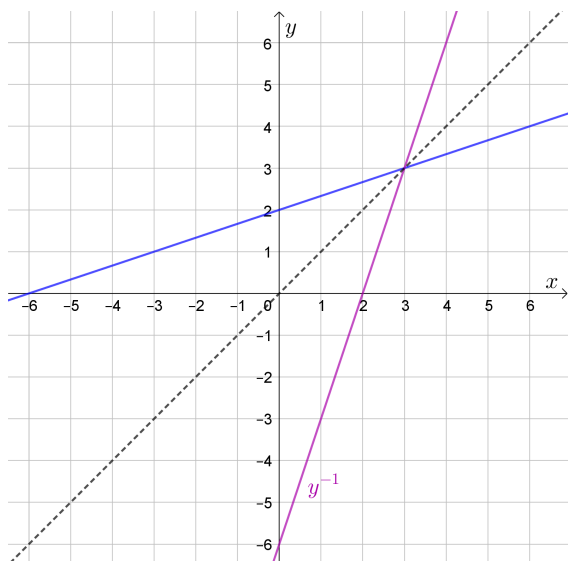
$$h = 2 - 5 \cdot t^2 \iff 5 \cdot t^2 = 2 - h \iff t^2 = \frac{2 - h}{5} \stackrel{t \geq 0}{\iff} t = \sqrt{\frac{2 - h}{5}}$$

- 4) Trage einen Funktionsterm der Umkehrfunktion t in das Kästchen ein.

$$t(h) = \sqrt{\frac{2 - h}{5}}$$



Im folgenden Koordinatensystem ist eine Gerade eingezeichnet.



1) Ermittle eine Gleichung der Gerade.

$$y = \frac{1}{3} \cdot x + 2 \tag{1}$$

2) Die Gerade ist also der Graph der linearen Funktion y mit folgender Funktionsgleichung:

$$y(x) = \frac{1}{3} \cdot x + 2 \tag{2}$$

3) Forme die Gleichung (1) nach x um.

$$x = 3 \cdot (y - 2) = 3 \cdot y - 6 \tag{3}$$

4) Gleichung (3) liefert eine Gleichung der Umkehrfunktion:

$$x(y) = 3 \cdot y - 6 \tag{4}$$

Beachte, dass zum Beispiel die Funktionsgleichungen

$$h(t) = 2 - 5 \cdot t^2 \quad \text{bzw.} \quad f(\odot) = 2 - 5 \cdot \odot^2$$

den gleichen Funktionsgraphen haben, denn:

- i) Der Name einer Funktion (h bzw. f) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.
- ii) Der Name des Arguments (t bzw. \odot) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.

5) Benenne die Umkehrfunktion in (4) und ihr Argument wie folgt um:

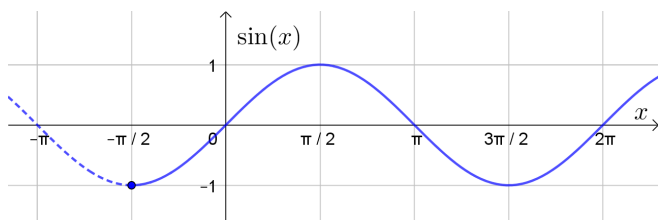
$$y^{-1}(x) = 3 \cdot x - 6$$

6) Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion y^{-1} im Koordinatensystem oben ein.

Definitionsmenge einschränken



Die Sinusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Ihr Funktionsgraph ist unten dargestellt. Damit sie eine Umkehrfunktion hat, schränken wir die Definitionsmenge auf ein Intervall D ein.



Wir starten im Tiefpunkt $(-\frac{\pi}{2} \mid -1)$.
Trage die größte passende Zahl ein:

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$$

Die Umkehrfunktion „Arcussinus“ wird deshalb neben arcsin auch mit \sin^{-1} abgekürzt.

