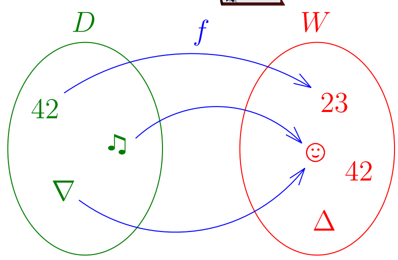
Funktion MmF

Eine **Funktion f** ist eine Vorschrift,
die *jedem* Element ihrer **Definitionsmenge D**
genau ein Element aus ihrer **Wertemenge W** zuordnet.

Kurz schreiben wir dafür auch: $f\colon D \to W$

Wenn f dem Element 42 das Element 23 zuordnet,
schreiben wir dafür kurz: $f(42) = 23$



Sprechweisen: „Der **Funktionswert** von 42 ist 23." bzw. „f von 42 ist gleich 23."

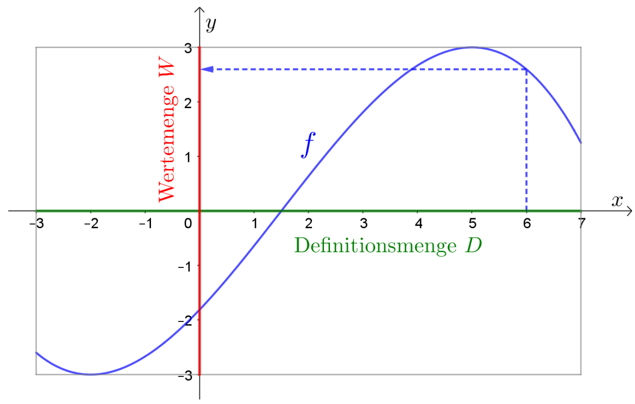
Die Definitionsmenge und Wertemenge können auch *unendlich* viele Elementen enthalten.

Zum Beispiel: $D = [-3; 7]$ und $W = [-3; 3]$

Für die rechts dargestellte Funktion f gilt:

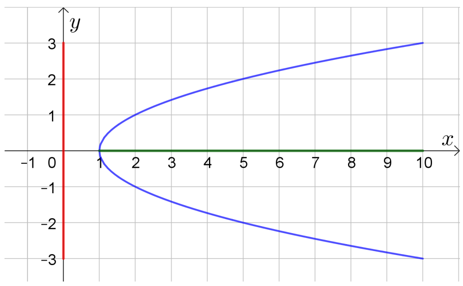
$f(6) = 2{,}597...$

Die eingezeichnete Kurve heißt Funktionsgraph.



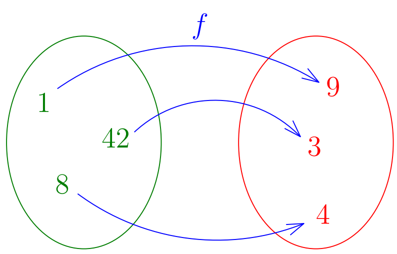
Vertical line test MmF

Begründe warum, die dargestellte Kurve *nicht* der Graph einer Funktion $f\colon [1; 10] \to [-3; 3]$ ist.



Umkehrfunktion MmF

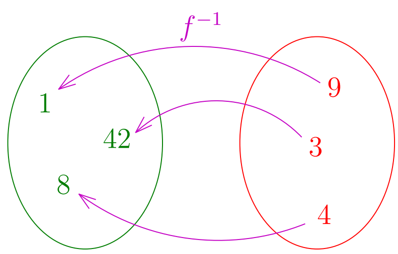
Links ist eine Funktion $f\colon \{1, 8, 42\} \to \{3, 4, 9\}$ dargestellt. Rechts haben wir die Pfeile umgedreht.
Dann wird jedem Element in $\{3, 4, 9\}$ *genau ein* Element in $\{1, 8, 42\}$ zugeordnet.



Diese umgekehrte Zuordnung

$f^{-1}\colon \{3, 4, 9\} \to \{1, 8, 42\}$

heißt **Umkehrfunktion** von f.



Die Funktion f hat die Definitionsmenge $\{1, 8, 42\}$ und die Wertemenge $\{3, 4, 9\}$.
Ihre Umkehrfunktion f^{-1} hat umgekehrt die Definitionsmenge $\{3, 4, 9\}$ und die Wertemenge $\{1, 8, 42\}$.

Vertauschen wir die Zeilen in der Wertetabelle von f, erhalten wir die Wertetabelle von f^{-1}.

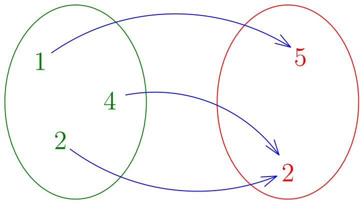
☺	1	8	42
$f(☺)$	9	4	3

$\star$	9	4	3
$f^{-1}(\star)$	1	8	42

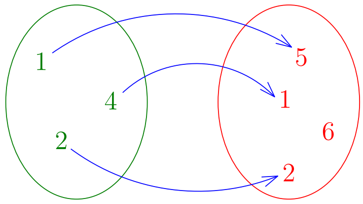
Funktionen ohne Umkehrfunktion

Die dargestellten Funktionen haben beide *keine* Umkehrfunktion. Warum?

a)



b)



Horizontal line test

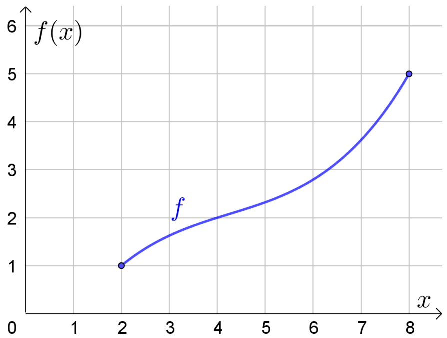
Der Graph einer Funktion $f\colon D \to W$ ist gegeben.

1) Ermittle die Definitionsmenge D von f.

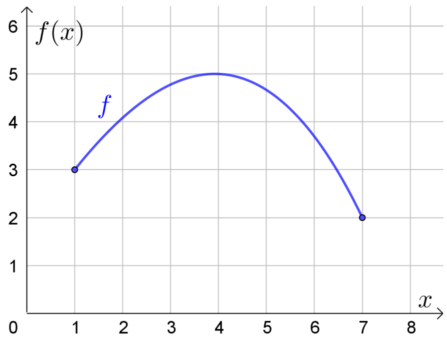
2) Ermittle die kleinstmögliche Wertemenge W von f.

3) Hat die Funktion $f\colon D \to W$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}\colon W \to D$? Begründe deine Antwort.

a)



b)



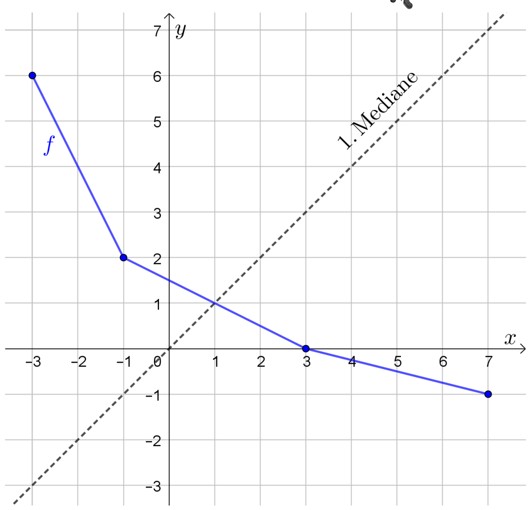
Spiegelung an 1. Mediane

$f\colon [-3;7] \to [-1;6]$ ist eine stückweise lineare Funktion.
Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

Die Funktion f hat eine Umkehrfunktion f^{-1}.

Wenn ein Punkt $(a \mid b)$ am Funktionsgraphen von f liegt, dann liegt der Punkt $(b \mid a)$ am Funktionsgraphen von f^{-1}. Ihre Graphen sind deshalb an der **1. Mediane** gespiegelt.

Zeichne rechts den Funktionsgraphen von f^{-1} ein.



Umformen ⤳ Umkehrfunktion

Du lässt einen Bleistift zum Zeitpunkt $t = 0\,\text{s}$ aus 2 Meter Höhe über dem Boden fallen.
Die Flughöhe des Bleistifts kann näherungsweise durch die folgende Funktion h modelliert werden:

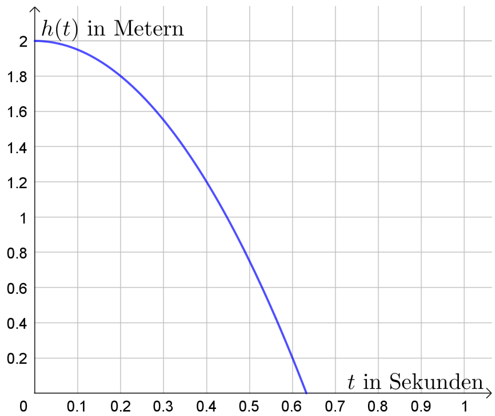
$$h(t) = 2 - 5 \cdot t^2$$

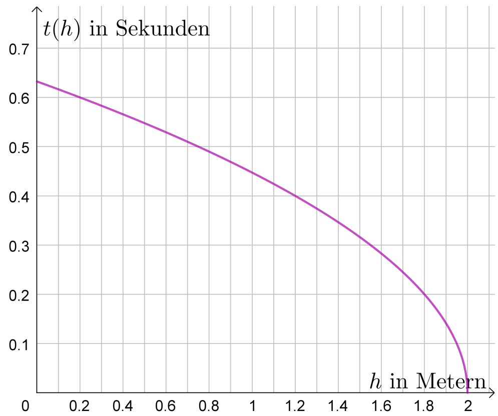
$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$h(t) \ldots$ Höhe des Bleistifts über dem Boden in Metern

1) Wie lang dauert es, bis der Bleistift am Boden aufschlägt?
Gib den größtmöglichen sinnvollen Definitionsbereich D dieser Funktion h an.

2) Wie lang dauert es, bis sich der Bleistift in 1 Meter Höhe über dem Boden befindet?

Die Funktion h ordnet jedem Zeitpunkt t in D die entsprechende Höhe $h(t)$ in $[0\,\text{m}; 2\,\text{m}]$ zu.
Die Umkehrfunktion t ordnet jeder Höhe h in $[0\,\text{m}; 2\,\text{m}]$ den entsprechenden Zeitpunkt $t(h)$ in D zu.
Die Graphen der beiden Funktionen sind dargestellt:





Die Graphen von Funktion und Umkehrfunktion sind (wie immer) auch in dieser Aufgabe an der 1. Mediane gespiegelt. Da auf den Achsen aber *verschiedene* Einheiten sind (Sekunden bzw. Meter), zeichnen wir die Graphen in *verschiedene* Koordinatensysteme ein.

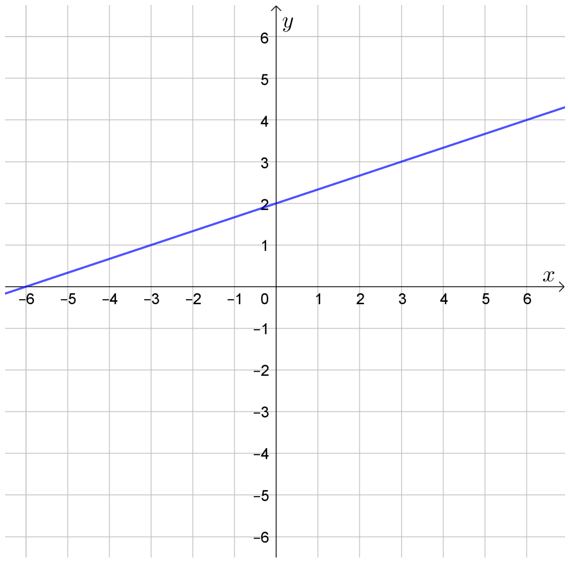
3) Forme die Gleichung $h = 2 - 5 \cdot t^2$ nach t um.

4) Trage einen Funktionsterm der Umkehrfunktion t in das Kästchen ein.

$t(h) = \boxed{}$

Geraden & Lineare Funktionen

Im folgenden Koordinatensystem ist eine Gerade eingezeichnet.



1) Ermittle eine Gleichung der Gerade.

$$y = \boxed{} \qquad (1)$$

2) Die Gerade ist also der Graph der linearen Funktion y mit folgender Funktionsgleichung:

$$y(x) = \boxed{} \qquad (2)$$

3) Forme die Gleichung (1) nach x um.

$$x = \boxed{} \qquad (3)$$

4) Gleichung (3) liefert eine Gleichung der Umkehrfunktion:

$$x(y) = \boxed{} \qquad (4)$$

Beachte, dass zum Beispiel die Funktionsgleichungen

$$h(t) = 2 - 5 \cdot t^2 \quad \text{bzw.} \quad f(☺) = 2 - 5 \cdot ☺^2$$

den gleichen Funktionsgraphen haben, denn:

i) Der Name einer Funktion (h bzw. f) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.

ii) Der Name des Arguments (t bzw. ☺) hat *keinen* Einfluss auf den Funktionsgraphen.

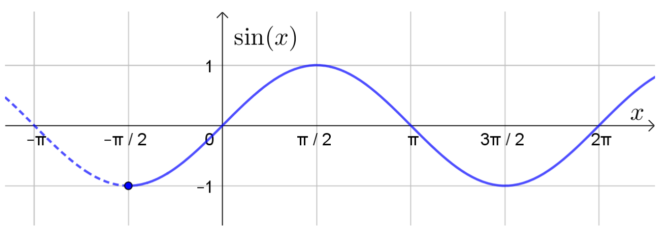
5) Benenne die Umkehrfunktion in (4) und ihr Argument wie folgt um:

$$y^{-1}(x) = \boxed{}$$

6) Zeichne den Graphen der Umkehrfunktion y^{-1} im Koordinatensystem oben ein.

Definitionsmenge einschränken

Die Sinusfunktion ist für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Ihr Funktionsgraph ist unten dargestellt.
Damit sie eine Umkehrfunktion hat, schränken wir die Definitionsmenge auf ein Intervall D ein.



Wir starten im Tiefpunkt $(-\frac{\pi}{2} \mid -1)$.

Trage die größte passende Zahl ein:

$$D = \left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\boxed{}\right]$$

Die Umkehrfunktion „Arcussinus“ wird deshalb neben arcsin auch mit $\sin^{-1}$ abgekürzt.