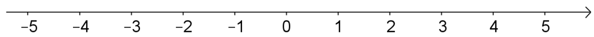
Ungleichungen

Auf der Zahlengerade ordnen wir die reellen Zahlen ihrer Größe nach.

Je weiter rechts die Zahl liegt, desto größer ist sie.



Wir verwenden die folgenden Schreibweisen und Sprechweisen:

$-3 < 5$	„-3 ist kleiner als 5.“
$-4 \leq -4$	„-4 ist kleiner als -4 oder gleich groß wie -4.“
$-1 > -3$	„-1 ist größer als -3.“
$-2 \geq -4{,}2$	„-2 ist größer als $-4{,}2$ oder gleich groß wie $-4{,}2$.“

Merkhilfe:

kleiner als

Ungleichungen

Kreuze jeweils an, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

Ungleichung	wahr	falsch
$-7 \geq 3$	☐	☒
$3 - 5 \leq 1$	☒	☐
$5 \cdot (-2) \geq 7$	☐	☒
$1 - 3 < 2 - 4$	☐	☒
$(-2) \cdot 4 \leq 0$	☒	☐
$2 > -\frac{1}{7}$	☒	☐

Lösungen von Ungleichungen

Die Ungleichung $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ enthält eine Variable x.

- Die Zahl **1** ist eine **Lösung** dieser Ungleichung, weil $\underbrace{3 \cdot \mathbf{1} + 2}_{=5} < \underbrace{14 - \mathbf{1}}_{=13}$ wahr ist.
- Die Zahl 3 ist *keine* Lösung dieser Ungleichung, weil $\underbrace{3 \cdot 3 + 2}_{=11} < \underbrace{14 - 3}_{=11}$ falsch ist.

Ungleichungen lösen

Tatsächlich hat die Ungleichung $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ unendlich viele Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Wir formen diese Ungleichung genau wie die entsprechende Gleichung $3 \cdot x + 2 = 14 - x$ nach x um:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x + 2 &< 14 - x \quad && | +x \\ 4 \cdot x + 2 &< 14 && | -2 \\ 4 \cdot x &< 12 && | : 4 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

Die unterste Ungleichung ist genau dann wahr, wenn wir für x eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.
Wir haben nur Äquivalenzumformungen durchgeführt.
Deshalb stimmen auch alle vorherigen Ungleichungen genau dann, wenn wir für x eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.

Die Lösungen von $3 \cdot x + 2 < 14 - x$ sind genau jene reellen Zahlen, die kleiner als 3 sind.
Die Lösungsmenge L dieser Ungleichung ist also das offene Intervall $L = \,]-\infty; 3[$ bzw. $L = (-\infty; 3)$.

Gleichungen ⇝ Ungleichungen

Beim Umformen von Ungleichungen müssen wir folgende zusätzliche Regeln beachten:

1) Trage in das Kästchen rechts $\leq$ oder $\geq$ richtig ein.

$$4 \geq 2$$
$$2 \boxed{\leq} 4$$

- Beim Vertauschen der Seiten einer Ungleichung dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

2) Trage in das Kästchen rechts $<$ oder $>$ richtig ein.

$$4 > 2 \quad \cdot(-3)$$
$$-12 \boxed{<} -6 \quad :(-3)$$

- Beim Multiplizieren mit einer *negativen* Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
- Beim Dividieren durch eine *negative* Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

$\cdot(-4)$

Löse die Ungleichung $\dfrac{2-x}{3} \leq \dfrac{5+2\cdot x}{-4}$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\frac{2-x}{3} \leq \frac{5+2\cdot x}{-4}$$

$$-4\cdot(2-x) \geq 3\cdot(5+2\cdot x)$$

$$-8+4\cdot x \geq 15+6\cdot x$$

$$-23 \geq 2\cdot x$$

$$x \leq -\frac{23}{2} \qquad \Longrightarrow \quad L =]-\infty; -\tfrac{23}{2}]$$

Bruchungleichungen lösen

Wir lösen die Ungleichung $\dfrac{3}{x-2} \leq 1$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) Da die Variable x in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge:
Wenn $x-2=0$, also $x=2$ gilt, dann ist der Bruch $\frac{3}{x-2}$ *nicht* definiert. Division durch 0
Die Zahl 2 kann damit auch keine Lösung der Ungleichung sein.
Die Definitionsmenge D enthält somit alle reellen Zahlen außer 2, kurz: $D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

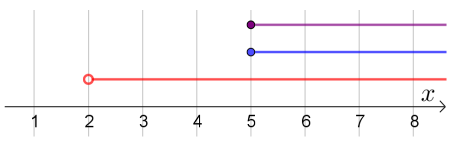
b) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge L, indem wir die Ungleichung nach x umformen.
Dazu multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(x-2)$. $x-2\neq 0$
Ob sich dabei das Ungleichheitszeichen umdreht, hängt vom Wert von x ab:

- **Fall 1:** Wenn $x-2>0$, also $x>2$ gilt, dann bleibt das Ungleichheitszeichen gleich.
- **Fall 2:** Wenn $x-2<0$, also $x<2$ gilt, dann müssen wir es umdrehen.

Fall 1: $x>2$

$$3 \leq 1\cdot(x-2)$$
$$3 \leq x-2 \qquad |\ +2$$
$$5 \leq x$$

Unter den Zahlen $x>2$ sind also alle Zahlen $x\geq 5$ Lösungen.

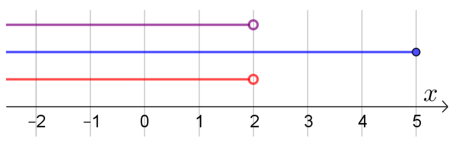


Also sind alle Zahlen $x\geq 5$ Lösungen.

Fall 2: $x<2$

$$3 \geq 1\cdot(x-2)$$
$$3 \geq x-2 \qquad |\ +2$$
$$5 \geq x$$

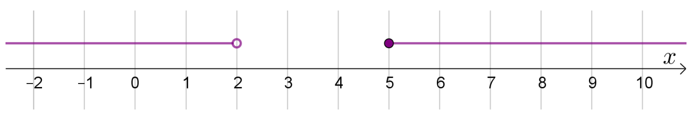
Unter den Zahlen $x<2$ sind also alle Zahlen $x\leq 5$ Lösungen.



Also sind alle Zahlen $x<2$ Lösungen.

Jede Zahl, die in $[5;\infty[$ *oder* in $]-\infty;2[$ liegt, ist eine Lösung.

Dafür schreiben wir kurz: $L = [5;\infty[\ \cup\ ]-\infty;2[$



2 Fälle

Ermittle die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{6 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 6} \geq 3$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Der Bruch ist genau dann *nicht* definiert, wenn $3 \cdot x + 6 = 0$, also $x = -2$ gilt.

Für die Definitionsmenge D gilt also: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

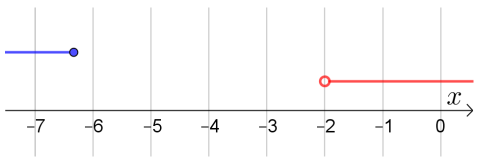
Wir multiplizieren beide Seiten der Ungleichung mit $(3 \cdot x + 6)$.

- **Fall 1:** Wenn $3 \cdot x + 6 > 0$, also $x > -2$ gilt, dann bleibt das Ungleichheitszeichen gleich.
- **Fall 2:** Wenn $3 \cdot x + 6 < 0$, also $x < -2$ gilt, dann müssen wir es umdrehen.

Fall 1: $x > -2$

$$\begin{aligned} 6 \cdot x - 1 &\geq 3 \cdot (3 \cdot x + 6) \\ 6 \cdot x - 1 &\geq 9 \cdot x + 18 \qquad | -9 \cdot x + 1 \\ -3 \cdot x &\geq 19 \\ x &\leq -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

Unter den Zahlen $x > -2$ sind also alle Zahlen $x \leq -\frac{19}{3}$ Lösungen, aber keine Zahl erfüllt *beide* Bedingungen:

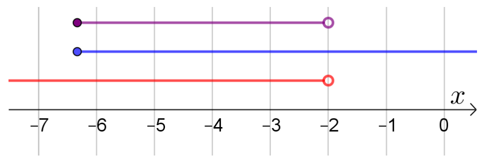


In diesem Fall gibt es also keine Lösungen.

Fall 2: $x < -2$

$$\begin{aligned} 6 \cdot x - 1 &\leq 3 \cdot (3 \cdot x + 6) \\ 6 \cdot x - 1 &\leq 9 \cdot x + 18 \qquad | -9 \cdot x + 1 \\ -3 \cdot x &\leq 19 \\ x &\geq -\frac{19}{3} \end{aligned}$$

Unter den Zahlen $x < -2$ sind also alle Zahlen $x \geq -\frac{19}{3}$ Lösungen:



In diesem Fall sind also alle Zahlen x mit $-\frac{19}{3} \leq x < -2$ Lösungen.

Für die Lösungsmenge L der Ungleichung gilt also: $L = [-\frac{19}{3}; -2[$

3 Fälle

Wir lösen die Bruchungleichung $\dfrac{2}{x+1} \geq \dfrac{4}{5-x}$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

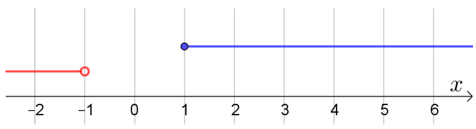
a) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:
Wenn $x+1=0$, also $x=-1$ gilt, dann ist der Bruch $\frac{2}{x+1}$ *nicht* definiert.
Wenn $5-x=0$, also $x=5$ gilt, dann ist der Bruch $\frac{4}{5-x}$ *nicht* definiert.
Die Zahlen -1 und 5 können damit auch keine Lösungen der Ungleichung sein.
Für die Definitionsmenge D gilt also: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 5\}$

b) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge L, indem wir die Ungleichung nach x umformen:
Dazu multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit $(x+1)$ und mit $(5-x)$.
Ob sich dabei das Ungleichheitszeichen umdreht, hängt vom Wert von x ab.
Trage die Vorzeichen $+$ bzw. $-$ richtig in die Tabelle ein:

Vorzeichen von ..., wenn ...	$x<-1$	$-1<x<5$	$x>5$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$
$(5-x)$	$+$	$+$	$-$
$(x+1)\cdot(5-x)$	$-$	$+$	$-$

Fall 1: $x < -1$

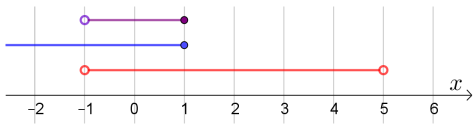
$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\leq 4\cdot(x+1) \\ 10-2\cdot x &\leq 4\cdot x+4 \quad &&|\ +2\cdot x-4 \\ 6 &\leq 6\cdot x &&|\ :6 \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x<-1$ sind alle Zahlen $x \geq 1$ Lösungen. Keine Zahl erfüllt *beide* Bedingungen.

Fall 2: $-1 < x < 5$

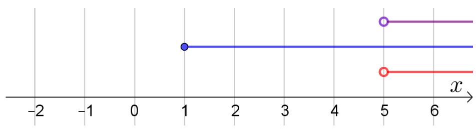
$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\geq 4\cdot(x+1) \\ &\vdots \\ 1 &\geq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $-1<x<5$ sind alle Zahlen $x \leq 1$ Lösungen, also alle Zahlen $-1 < x \leq 1$.

Fall 3: $x > 5$

$$\begin{aligned} 2\cdot(5-x) &\leq 4\cdot(x+1) \\ &\vdots \\ 1 &\leq x \end{aligned}$$



Unter den Zahlen $x>5$ sind alle Zahlen $x \geq 1$ Lösungen, also alle Zahlen $x > 5$.

Für die Lösungsmenge L der Ungleichung gilt also: $L = \left]-1; 1\right] \cup \left]5; \infty\right[$