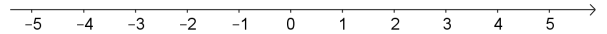


Ungleichungen 


Auf der Zahlengerade ordnen wir die **reellen Zahlen** ihrer Größe nach.

Je weiter rechts die Zahl liegt, desto größer ist sie.




Wir verwenden die folgenden Schreibweisen und Sprechweisen:

- |                |                                                                   |                           |
|----------------|-------------------------------------------------------------------|---------------------------|
| $-3 < 5$       | „-3 ist <b>kleiner</b> als 5.“                                    | Merkhilfe:<br>kleiner als |
| $-4 \leq -4$   | „-4 ist <b>kleiner</b> als -4 oder <b>gleich</b> groß wie -4.“    |                           |
| $-1 > -3$      | „-1 ist <b>größer</b> als -3.“                                    |                           |
| $-2 \geq -4,2$ | „-2 ist <b>größer</b> als -4,2 oder <b>gleich</b> groß wie -4,2.“ |                           |

Ungleichungen 


Kreuze jeweils an, ob die Ungleichung wahr oder falsch ist.

wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $-7 \geq 3$	wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $3 - 5 \leq 1$	wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $5 \cdot (-2) \geq 7$	wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $1 - 3 < 2 - 4$	wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $(-2) \cdot 4 \leq 0$	wahr falsch <input type="checkbox"/> <input type="checkbox"/> $2 > -\frac{1}{7}$
---------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------

Lösungen von Ungleichungen 

Die Ungleichung  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$  enthält eine Variable  $x$ .

- Die Zahl **1** ist eine **Lösung** dieser Ungleichung, weil  $\underbrace{3 \cdot 1 + 2}_{=5} < \underbrace{14 - 1}_{=13}$  wahr ist.
- Die Zahl **3** ist *keine* Lösung dieser Ungleichung, weil  $\underbrace{3 \cdot 3 + 2}_{=11} < \underbrace{14 - 3}_{=11}$  falsch ist.

Ungleichungen lösen 

Tatsächlich hat die Ungleichung  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$  unendlich viele Lösungen über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .


Wir formen diese Ungleichung **genau wie** die entsprechende Gleichung  $3 \cdot x + 2 = 14 - x$  nach  $x$  um:

$3 \cdot x + 2 < 14 - x$	+x
<div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div> < <div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	-2
<div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div> < <div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	: 4
<div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div> < <div style="border: 1px dashed black; width: 60px; height: 20px; display: inline-block;"></div>	

Die unterste Ungleichung ist genau dann wahr, wenn wir für  $x$  eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.  
Wir haben nur **Äquivalenzumformungen** durchgeführt.  
Deshalb stimmen auch alle vorherigen Ungleichungen genau dann, wenn wir für  $x$  eine kleinere Zahl als 3 einsetzen.

Die Lösungen von  $3 \cdot x + 2 < 14 - x$  sind genau jene reellen Zahlen, die kleiner als 3 sind.


Die Lösungsmenge  $L$  dieser Ungleichung ist also das **offene Intervall**  $L = ]-\infty; 3[$  bzw.  $L = (-\infty; 3)$ .

Gleichungen  $\rightsquigarrow$  Ungleichungen 

Beim Umformen von Ungleichungen müssen wir folgende zusätzliche Regeln beachten:

- Trage in das Kästchen rechts  $\leq$  oder  $\geq$  richtig ein.  $4 \geq 2$   
 $2 \boxed{\phantom{0}} 4$ 
  - Beim Vertauschen der Seiten einer Ungleichung dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
- Trage in das Kästchen rechts  $<$  oder  $>$  richtig ein.  $4 > 2$   
 $\cdot (-3) \left( \begin{array}{c} -12 \boxed{\phantom{0}} -6 \end{array} \right) : (-3)$ 
  - Beim Multiplizieren mit einer *negativen* Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.
  - Beim Dividieren durch eine *negative* Zahl dreht sich das Ungleichheitszeichen um.

Löse die Ungleichung  $\frac{2-x}{3} \leq \frac{5+2 \cdot x}{-4}$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

Bruchungleichungen lösen  **MmF**

Wir lösen die Ungleichung  $\frac{3}{x-2} \leq 1$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

a) Da die Variable  $x$  in einem Nenner vorkommt, ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge:

Wenn  $x - 2 = 0$ , also  $x = 2$  gilt, dann ist der Bruch  $\frac{3}{x-2}$  *nicht* definiert. Division durch 0

Die Zahl 2 kann damit auch keine Lösung der Ungleichung sein.

Die Definitionsmenge  $D$  enthält somit alle reellen Zahlen außer 2, kurz:  $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

b) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Ungleichung nach  $x$  umformen.

Dazu multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit  $(x - 2)$ .  $x - 2 \neq 0$

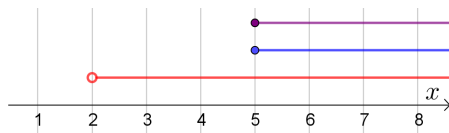
Ob sich dabei das Ungleichheitszeichen umdreht, hängt vom Wert von  $x$  ab:

- **Fall 1:** Wenn  $x - 2 > 0$ , also  $x > 2$  gilt, dann bleibt das Ungleichheitszeichen gleich.
- **Fall 2:** Wenn  $x - 2 < 0$ , also  $x < 2$  gilt, dann müssen wir es umdrehen.

**Fall 1:**  $x > 2$

$$\begin{aligned} 3 &\leq 1 \cdot (x - 2) \\ 3 &\leq x - 2 && | + 2 \\ 5 &\leq x \end{aligned}$$

Unter den Zahlen  $x > 2$  sind also alle Zahlen  $x \geq 5$  Lösungen.

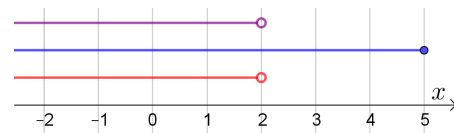


Also sind alle Zahlen  $x \geq 5$  Lösungen.

**Fall 2:**  $x < 2$

$$\begin{aligned} 3 &\geq 1 \cdot (x - 2) \\ 3 &\geq x - 2 && | + 2 \\ 5 &\geq x \end{aligned}$$

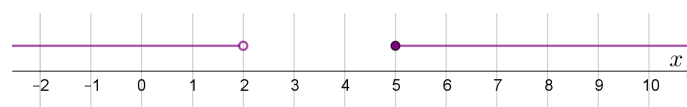
Unter den Zahlen  $x < 2$  sind also alle Zahlen  $x \leq 5$  Lösungen.



Also sind alle Zahlen  $x < 2$  Lösungen.

Jede Zahl, die in  $[5; \infty[$  oder in  $]-\infty; 2[$  liegt, ist eine Lösung.

Dafür schreiben wir kurz:  $L = [5; \infty[ \cup ]-\infty; 2[$



Ermittle die Definitionsmenge und die Lösungsmenge der Ungleichung  $\frac{6 \cdot x - 1}{3 \cdot x + 6} \geq 3$   
über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

Wir lösen die Bruchungleichung  $\frac{2}{x+1} \geq \frac{4}{5-x}$  über der Grundmenge  $\mathbb{R}$ .

a) Zuerst ermitteln wir die Definitionsmenge:

Wenn  $x + 1 = 0$ , also  $x = -1$  gilt, dann ist der Bruch  $\frac{2}{x+1}$  nicht definiert.

Wenn  $5 - x = 0$ , also  $x = 5$  gilt, dann ist der Bruch  $\frac{4}{5-x}$  nicht definiert.

Die Zahlen  $-1$  und  $5$  können damit auch keine Lösungen der Ungleichung sein.

Für die Definitionsmenge  $D$  gilt also:  $D =$

b) Dann ermitteln wir die Lösungsmenge  $L$ , indem wir die Ungleichung nach  $x$  umformen:

Dazu multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung mit  $(x + 1)$  und mit  $(5 - x)$ .

Ob sich dabei das Ungleichheitszeichen umdreht, hängt vom Wert von  $x$  ab.

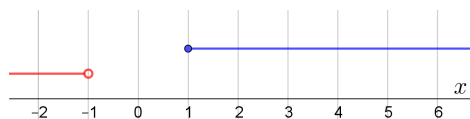
Trage die Vorzeichen  $+$  bzw.  $-$  richtig in die Tabelle ein:

Vorzeichen von ..., wenn ...	$x < -1$	$-1 < x < 5$	$x > 5$
$(x + 1)$			
$(5 - x)$			
$(x + 1) \cdot (5 - x)$			

**Fall 1:**  $x < -1$

$$2 \cdot (5 - x) \quad \square \quad 4 \cdot (x + 1)$$

			$+ 2 \cdot x - 4$
			$: 6$



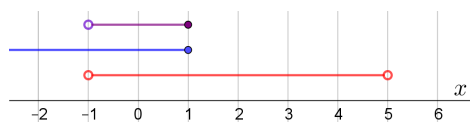
Unter den Zahlen  $x < -1$  sind alle Zahlen  $x \geq 1$  Lösungen. Keine Zahl erfüllt beide Bedingungen.

**Fall 2:**  $-1 < x < 5$

$$2 \cdot (5 - x) \quad \square \quad 4 \cdot (x + 1)$$

$$\vdots$$

$$1 \quad \square \quad x$$



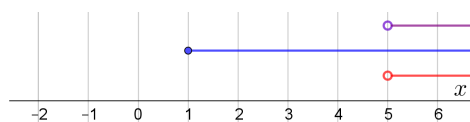
Unter den Zahlen  $-1 < x < 5$  sind alle Zahlen  $x \leq 1$  Lösungen, also alle Zahlen  $-1 < x \leq 1$ .

**Fall 3:**  $x > 5$

$$2 \cdot (5 - x) \quad \square \quad 4 \cdot (x + 1)$$

$$\vdots$$

$$1 \quad \square \quad x$$



Unter den Zahlen  $x > 5$  sind alle Zahlen  $x \geq 1$  Lösungen, also alle Zahlen  $x > 5$ .

Für die Lösungsmenge  $L$  der Ungleichung gilt also:  $L =$

