Lineare DGL 1. Ordnung

Die Differentialgleichungen (DGL)

1) $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x) + 2 \cdot x^3$, **2)** $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$ und **3)** $y'(x) = \cos(x) \cdot y(x) - 42 \cdot e^{\sin(x)}$

haben alle die Form $\boldsymbol{y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)}$.

Es sind **lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung**.

i) Sie haben **1. Ordnung**, weil y' die höchste auftretende Ableitung von y ist. Es kommt zum Beispiel y'' *nicht* vor.

ii) Sie sind **linear**, weil sie die Form $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$ haben. Es kommen z. B. y^2 oder $y \cdot y'$ oder $\sin(y')$ *nicht* vor.

Wenn $\boldsymbol{s(x) = 0}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, dann ist

$$\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x)}$$

eine **homogene Differentialgleichung**.

Ansonsten nennt man

$$\boldsymbol{y'(x) = k \cdot y(x) + \overbrace{s(x)}^{\text{Störfunktion}}}$$

eine **inhomogene Differentialgleichung**.

Lineare DGL 1. Ordnung

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$\boldsymbol{y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)}$$

kannst du mit den folgenden Schritten ermitteln:

1) Löse die homogene DGL $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

Die allgemeine Lösung $\boldsymbol{y_h}$ der homogenen DGL nennen wir auch kurz **homogene Lösung**.

2) Ermittle eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$ mithilfe der Methode *Variation der Konstanten*. Auf der nächsten Seite erfährst du, wie diese Methode funktioniert.

Jede spezielle Lösung $\boldsymbol{y_p}$ der inhomogenen DGL nennen wir auch kurz **partikuläre Lösung**.

3) Die **allgemeine Lösung** der DGL ist dann $\boldsymbol{y = y_h + y_p}$.

Trennung der Variablen ⇝ Homogene Lösung

Die DGL $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x) + 2 \cdot x^3$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x)$.

Ermittle die homogene Lösung y_h mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

$$y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + c_1$$

$$|y| = e^{\ln(|x|)+c_1} = e^{\ln(|x|)} \cdot e^{c_1} = c_2 \cdot |x|$$

$$y(x) = c \cdot x$$

Die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist also $y_h(x) = c \cdot x$.

Variation der Konstanten $\rightsquigarrow$ Partikuläre Lösung

Die DGL $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x) + 2 \cdot x^3$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x)$.

Für die homogene Lösung gilt: $\boldsymbol{y_h(x) = c \cdot x}$

Die Methode *Variation der Konstanten* hilft beim Ermitteln einer Lösung der inhomogenen DGL.

Dazu ersetzen wir in y_h die Integrationskonstante c durch eine Funktion $x \mapsto c(x)$.

Bei dieser DGL verwenden wir also den Ansatz $\boldsymbol{y_p(x) = c(x) \cdot x}$. **„Variation der Konstanten“**

Wir ermitteln eine Funktion $x \mapsto c(x)$ so, dass y_p tatsächlich eine Lösung der inhomogenen DGL ist.

Dafür setzen wir y_p in die inhomogene DGL ein:

$$y_p'(x) = \frac{1}{x} \cdot y_p(x) + 2 \cdot x^3$$

$$\underbrace{c'(x) \cdot x + c(x) \cdot 1}_{\text{Produktregel}} = \frac{1}{x} \cdot c(x) \cdot x + 2 \cdot x^3$$

Die Terme mit dem Faktor $c(x)$ stimmen auf beiden Seiten überein. Wir können sie also von beiden Seiten subtrahieren. Das ist kein Zufall. Dahinter steckt der Ansatz bei dieser Methode. Mehr dazu findest du am Ende des Arbeitsblatts.

$$c'(x) \cdot x = 2 \cdot x^3$$

$$c'(x) = 2 \cdot x^2$$

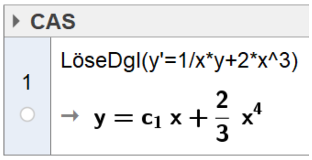
$$c(x) = \frac{2}{3} \cdot x^3$$

In diesem Schritt ist keine Integrationskonstante notwendig.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGL ist also $\boldsymbol{y_p(x) = c(x) \cdot x} = \frac{2}{3} \cdot x^4$.

Für die allgemeine Lösung der DGL $y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x) + 2 \cdot x^3$ gilt:

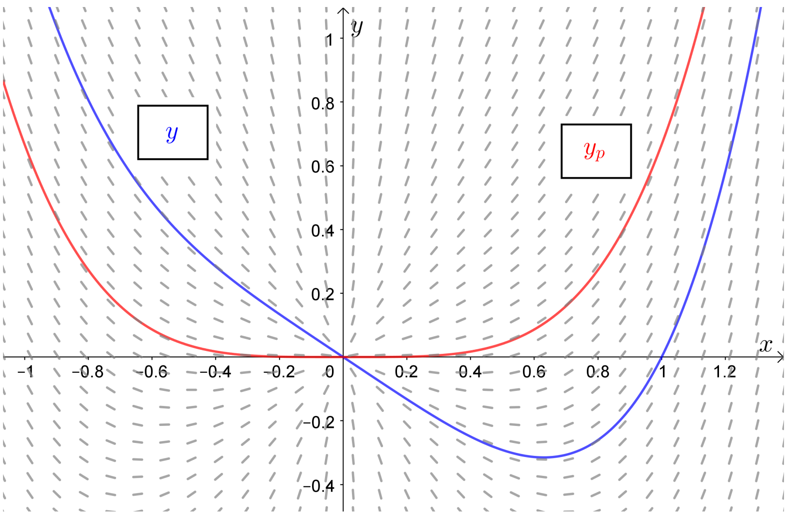
$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x^4$$



Im Bild unten sind das Richtungsfeld der DGL

$$y'(x) = \frac{1}{x} \cdot y(x) + 2 \cdot x^3$$

und der Funktionsgraph von y_p dargestellt.
Außerdem ist der Funktionsgraph jener speziellen Lösung y mit $y(1) = 0$ dargestellt.
Ermittle eine Funktionsgleichung dieser speziellen Lösung y.



$$y(1) = 0 \iff c \cdot 1 + \frac{2}{3} \cdot 1^4 = 0$$

$$\iff c = -\frac{2}{3}$$

$$y(x) = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{3} \cdot x^4$$

Lineare DGL 1. Ordnung MmF

Die DGL $y'(x) = 4 \cdot y(x) + e^{6 \cdot x}$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = 4 \cdot y(x)$.

1) Zeige mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*, dass $y_h(x) = c \cdot e^{4 \cdot x}$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist.

2) Zeige mithilfe der Methode *Variation der Konstanten*, dass $y_p(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$ eine Lösung der inhomogenen DGL ist.

3) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL.

4) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 5$ erfüllt.

1) Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= 4 \cdot y(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4 \cdot y \\ \int \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y &= \int 4 \, \mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= 4 \cdot x + c_1 \\ |y| &= e^{4 \cdot x + c_1} = c_2 \cdot e^{4 \cdot x} \\ \implies y_h(x) &= c \cdot e^{4 \cdot x} \end{aligned}$$

2) Variation der Konstanten: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{4 \cdot x}$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 4 \cdot y_p(x) + e^{6 \cdot x} \\ c'(x) \cdot e^{4 \cdot x} + c(x) \cdot e^{4 \cdot x} \cdot 4 &= 4 \cdot c(x) \cdot e^{4 \cdot x} + e^{6 \cdot x} \\ c'(x) \cdot e^{4 \cdot x} &= e^{6 \cdot x} \\ c'(x) &= e^{2 \cdot x} \\ c(x) &= \frac{1}{2} \cdot e^{2 \cdot x} \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{4 \cdot x} = \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$

3) Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{4 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$

4) Spezielle Lösung mit $y(0) = 5$:

$$y(0) = 5 \iff c \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 5 \iff c = \frac{9}{2}$$

$$y(x) = \frac{9}{2} \cdot e^{4 \cdot x} + \frac{1}{2} \cdot e^{6 \cdot x}$$

Lineare DGL 1. Ordnung

Die DGL $y'(x) = \cos(x) \cdot y(x) - 42 \cdot e^{\sin(x)}$ hat die zugehörige homogene DGL $y'(x) = \cos(x) \cdot y(x)$.

1) Zeige mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*, dass $y_h(x) = c \cdot e^{\sin(x)}$ die allgemeine Lösung der homogenen DGL ist.

2) Zeige mithilfe der Methode *Variation der Konstanten*, dass $y_p(x) = -42 \cdot x \cdot e^{\sin(x)}$ eine Lösung der inhomogenen DGL ist.

3) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL.

1) Trennung der Variablen:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x) \cdot y$$

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\ln(|y|) = \sin(x) + c_1$$

$$|y| = e^{\sin(x)+c_1} = c_2 \cdot e^{\sin(x)}$$

$$\Longrightarrow \quad y_h(x) = c \cdot e^{\sin(x)}$$

2) Variation der Konstanten: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{\sin(x)}$

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= \cos(x) \cdot y_p(x) - 42 \cdot e^{\sin(x)} \\ c'(x) \cdot e^{\sin(x)} + c(x) \cdot e^{\sin(x)} \cdot \cos(x) &= \cos(x) \cdot c(x) \cdot e^{\sin(x)} - 42 \cdot e^{\sin(x)} \\ c'(x) \cdot e^{\sin(x)} &= -42 \cdot e^{\sin(x)} \\ c'(x) &= -42 \\ c(x) &= -42 \cdot x \end{aligned}$$

Partikuläre Lösung: $y_p(x) = c(x) \cdot e^{\sin(x)} = -42 \cdot x \cdot e^{\sin(x)}$

3) Allgemeine Lösung: $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c \cdot e^{\sin(x)} - 42 \cdot x \cdot e^{\sin(x)}$

Variation der Konstanten

Rechne nach, dass für die allgemeine Lösung y_h der homogenen DGL $y'(x) = f(x) \cdot y(x)$ gilt:

$$y_h(x) = c \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Wir setzen $y_p(x) = c(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x}$ in die inhomogene DGL $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$ ein:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= f(x) \cdot y_p(x) + s(x) \\ c'(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + c(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} \cdot f(x) &= f(x) \cdot c(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} + s(x) \\ c'(x) \cdot e^{\int f(x)\,\mathrm{d}x} &= s(x) \end{aligned}$$

Die Methode *Variation der Konstanten* ist also zielführend für die DGL $y'(x) = f(x) \cdot y(x) + s(x)$, wenn wir eine Stammfunktion F von f und eine Stammfunktion von $\frac{s}{e^F}$ ermitteln können.