

Wie **Vektoren in der Ebene** definieren wir **Vektoren im Raum** analog als Zahlentripel: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$

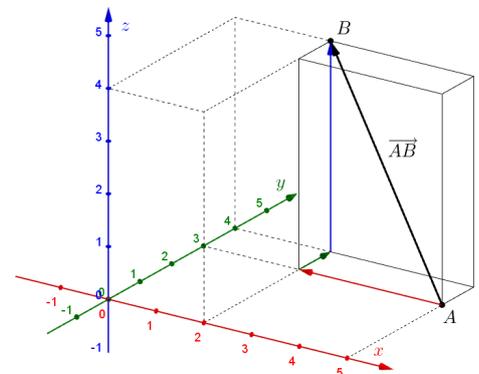
Mit Vektoren im Raum rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

- **Addition von Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

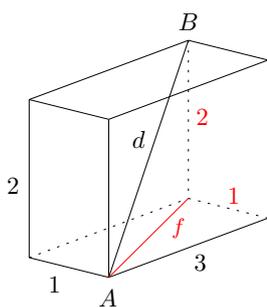
Die Punkte $A = (5 \mid 3 \mid 0)$ und $B = (2 \mid 4 \mid 4)$ sind rechts im 3-dimensionalen Koordinatensystem eingezeichnet. Durch den Pfeil von A nach B ist ein Vektor \vec{AB} festgelegt. Ermittle seine Komponenten: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für alle Punkte $A = (a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B = (b_1 \mid b_2 \mid b_3)$ gilt:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad \text{„Spitze minus Anfangspunkt“}$$



Die Punkte A und B spannen dabei einen **Quader** auf. Der Vektor \vec{AB} ist als Raumdiagonale dieses Quaders eingezeichnet. Die **Beträge** der 3 Komponenten von \vec{AB} sind die Seitenlängen dieses Quaders.



Berechne die Entfernung d der Eckpunkte A und B des dargestellten Quaders.

$$f = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

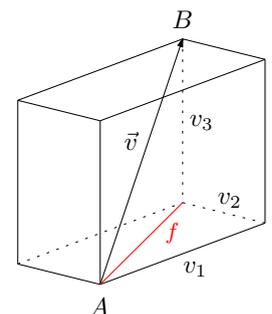
$$d = \sqrt{f^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} = 3,741\dots$$

Für die **Länge** (den **Betrag**) des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Leite diese Formel her:

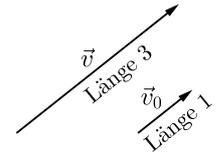
$$f = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \implies |\vec{v}| = \sqrt{f^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Der Vektor $\vec{v}_0 = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ hat die gleiche **Richtung** und **Orientierung** wie \vec{v} .

Für seine Länge gilt: $|\vec{v}_0| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$

Wir nennen \vec{v}_0 den **Einheitsvektor** von \vec{v} .



Die Punkte $A = (3 \mid 6 \mid -2)$ und $B = (1 \mid -8 \mid 3)$ liegen auf einer Gerade (Koordinaten in cm).
 Berechne jene beiden Punkte P und Q auf dieser Gerade, die 4,2 cm vom Punkt A entfernt sind.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ -8-6 \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 5 \end{pmatrix}$$

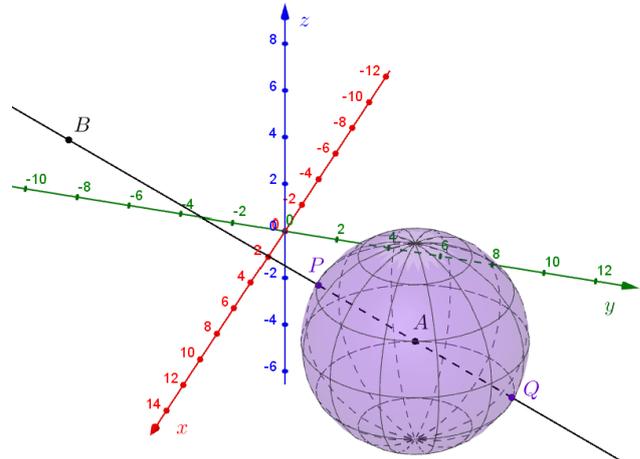
$$|\vec{AB}| = \sqrt{2^2 + 14^2 + 5^2} = 15 \text{ cm}$$

$$\vec{AP} = \frac{4,2}{15} \cdot \vec{AB} = \begin{pmatrix} -0,56 \\ -3,92 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

$$P = A + \vec{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,56 \\ -3,92 \\ 1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,44 \\ 2,08 \\ -0,6 \end{pmatrix} = (2,44 \mid 2,08 \mid -0,6)$$

$$\vec{AQ} = -\vec{AP} = \begin{pmatrix} 0,56 \\ 3,92 \\ -1,4 \end{pmatrix}$$

$$Q = A + \vec{AQ} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,56 \\ 3,92 \\ -1,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,56 \\ 9,92 \\ -3,4 \end{pmatrix} = (3,56 \mid 9,92 \mid -3,4)$$



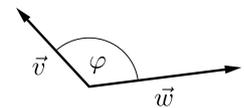
Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.
 Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ können wir wie in der Ebene mit der **Vektor-Winkel-Formel** berechnen:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} \quad \text{mit } \vec{v}, \vec{w} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Für den Winkel φ gilt also wie in der **Ebene** auch im Raum:

$0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$
$\varphi = 90^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
$90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$	\iff	$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$

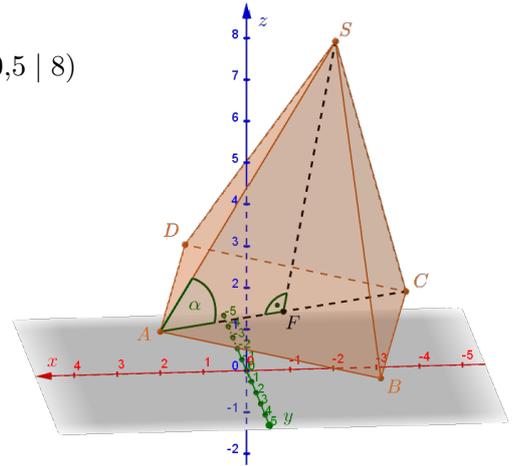
Rechts ist eine gerade **Pyramide** mit rechteckiger Grundfläche $ABCD$ und Spitze S dargestellt. Dabei gilt (Koordinaten in cm):

$$A = (2 \mid 0 \mid 1), B = (-3 \mid 1 \mid 0), C = (-4 \mid -3 \mid 1), S = (-2 \mid 0,5 \mid 8)$$

- 1) Berechne den Eckpunkt D .
- 2) Berechne den eingezeichneten Winkel $\alpha = \angle CAS$.

Der Fußpunkt F liegt in der Mitte der Grundfläche.

- 3) Berechne den Fußpunkt F .
- 4) Berechne das Volumen der Pyramide.



$$1) D = A + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \mid -4 \mid 1)$$

$$2) \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{45}$$

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0,5 \\ 7 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{4^2 + 0,5^2 + 7^2} = \sqrt{65,25}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = 24 - 1,5 + 0 = 22,5$$

$$\implies \alpha = \arccos\left(\frac{22,5}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{65,25}}\right) = 65,46\dots^\circ$$

$$3) F = A + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{A + C}{2} = (-1 \mid -1,5 \mid 1)$$

$$4) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \implies G = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{5^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{486}$$

$$\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \implies h = |\overrightarrow{FS}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{54}$$

$$\implies V = \frac{G \cdot h}{3} = 54 \text{ cm}^3$$

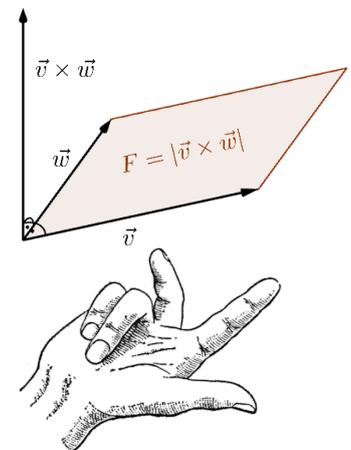
Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren \vec{v} und \vec{w} ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ v_1 \cdot w_3 - w_1 \cdot v_3 \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „ \vec{v} kreuz \vec{w} “
„Kreuzprodukt“

Das Vektorprodukt hat die folgenden drei Eigenschaften:

- 1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf \vec{v} und normal auf \vec{w} .
Damit ist die Richtung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Orientierung.
- 2) Die Vektoren \vec{v} , \vec{w} und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.
Lege den Daumen deiner *rechten* Hand auf \vec{v} und den Zeigefinger auf \vec{w} .
Wenn du den Mittelfinger abbiegst, dann kannst du ihn auf den Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ legen.
Damit ist die Orientierung von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt, aber *nicht* die Länge.
- 3) Die Vektoren \vec{v} und \vec{w} spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt F dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
Damit ist die Länge von $\vec{v} \times \vec{w}$ eindeutig festgelegt.



Das Vektorprodukt ist *nicht* kommutativ. Es gilt nämlich:

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

Lege umgekehrt den Daumen deiner rechten Hand auf \vec{w} und den Zeigefinger auf \vec{v} .

Berechne das Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ der Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Überprüfe, dass $\vec{v} \times \vec{w}$ tatsächlich einen rechten Winkel mit den Vektoren \vec{v} und \vec{w} einschließt.

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-15 \\ -0-3 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 + 12 - 12 = 0 \checkmark$$

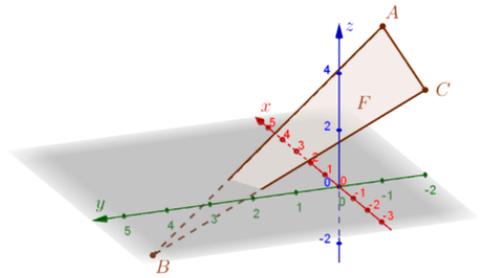
$$(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 7 - 15 + 8 = 0 \checkmark$$

Das Dreieck mit den Eckpunkten $A = (3 \mid -2 \mid 4)$, $B = (1 \mid 4 \mid -2)$ und $C = (0 \mid -2 \mid 3)$ ist dargestellt.

- 1) Berechne den Vektor $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. (Einheiten in cm)
- 2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks.

$$1) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6-0 \\ -(2-18) \\ 0-(-18) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$2) F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 16^2 + 18^2} = 12,40... \text{ cm}^2$$



- i) Bei $r \cdot \vec{v}$ wird ein Vektor \vec{v} mit einem Skalar $r \in \mathbb{R}$ multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.
- ii) Beim Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Skalar**.
- iii) Beim Vektorprodukt $\vec{v} \times \vec{w}$ werden zwei Vektoren multipliziert. Das Ergebnis ist ein **Vektor**.

Gegeben sind die Vektoren \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} im Raum und ein Skalar $r \in \mathbb{R}$.

Ist das Ergebnis der Rechnung jeweils ein Skalar oder ein Vektor?

a) $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \times \vec{c}$
Ergebnis: Vektor

b) $\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Skalar}} \cdot \vec{c}$
Ergebnis: Vektor

c) $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \cdot \vec{c}$
Ergebnis: Skalar

d) $\underbrace{(\vec{a} \times \vec{b})}_{\text{Vektor}} \cdot r$
Ergebnis: Vektor

e) $\underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{b})}_{\text{Skalar}} \cdot r$
Ergebnis: Skalar

