Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ berechnen wir folgendermaßen:

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}$$

Das Ergebnis (*Produkt*) ist also eine Zahl (*Skalar*).

Skalarprodukt und Winkel

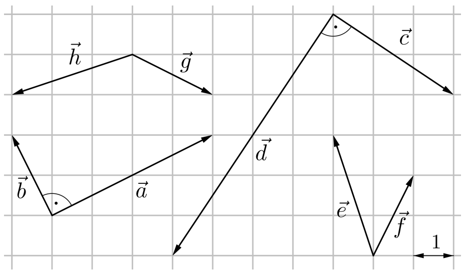
Rechts unten sind 4 Paare von Vektoren dargestellt.
Ermittle jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \binom{4}{2} \cdot \binom{-1}{2} = -4 + 4 = 0$

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = \binom{3}{-2} \cdot \binom{-4}{-6} = -12 + 12 = 0$

3) $\vec{e} \cdot \vec{f} = \binom{-1}{3} \cdot \binom{1}{2} = -1 + 6 = 5$

4) $\vec{g} \cdot \vec{h} = \binom{2}{-1} \cdot \binom{-3}{-1} = -6 + 1 = -5$



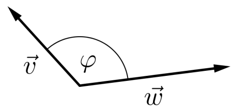
Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Vermutung?

Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.

Den eingeschlossenen Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ können wir mit der

Vektor-Winkel-Formel berechnen: $\boldsymbol{\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}}$ mit $\vec{v}, \vec{w} \neq \binom{0}{0}$



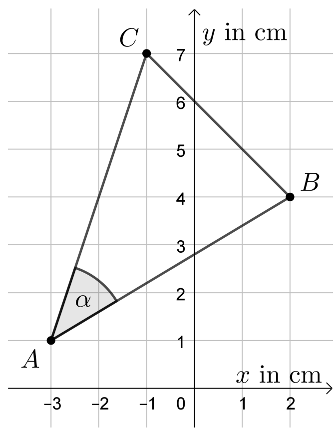
Die Vektor-Winkel-Formel kann man aus dem Cosinussatz herleiten. Mehr dazu findest du auf der letzten Seite.

Vektor-Winkel-Formel

Das Dreieck ABC mit den Eckpunkten $A = (-3 \mid 1)$, $B = (2 \mid 4)$ und $C = (-1 \mid 7)$ ist dargestellt.

1) Berechne den Winkel α mit der Vektor-Winkel-Formel.

2) Berechne den Flächeninhalt F des Dreiecks mit der trigonometrischen Flächenformel.



1) $\overrightarrow{AB} = \binom{5}{3} \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

$\overrightarrow{AC} = \binom{2}{6} \implies |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 10 + 18 = 28$

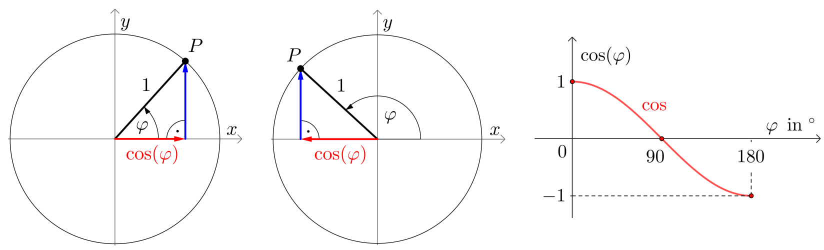
$$\implies \alpha = \arccos\left(\frac{28}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{40}}\right) = 40{,}60...°$$

2) $F = \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \sin(\alpha)}{2} = 12\,\text{cm}^2$

Vorzeichen des Skalarprodukts

Die Winkelfunktion Cosinus ist am Einheitskreis für alle Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert.
Wir untersuchen das Vorzeichen von $\cos(\varphi)$ für alle Winkel φ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$.
Trage $<$, $>$ oder $=$ richtig in die Kästchen ein:

$\varphi = 0°$	$\cos(\varphi) = 1$
$0° < \varphi < 90°$	$\cos(\varphi) > 0$
$\varphi = 90°$	$\cos(\varphi) = 0$
$90° < \varphi < 180°$	$\cos(\varphi) < 0$
$\varphi = 180°$	$\cos(\varphi) = -1$



Das Vorzeichen von $\cos(\varphi)$ verrät uns also, ob φ ein spitzer, rechter oder stumpfer Winkel ist.

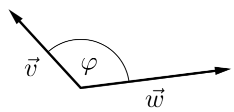
Aus $\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$ und $|\vec{v}|, |\vec{w}| > 0$ folgt, dass $\cos(\varphi)$ und $\vec{v} \cdot \vec{w}$ das gleiche Vorzeichen haben.

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ schließen also genau dann einen ...

... **rechten Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ gilt.

... **spitzen Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$ gilt.

... **stumpfen Winkel** φ ein, wenn $\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$ gilt.



Vorzeichen des Skalarprodukts

Die Richtung der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x-5 \\ 3 \end{pmatrix}$ hängt von $x \in \mathbb{R}$ ab.

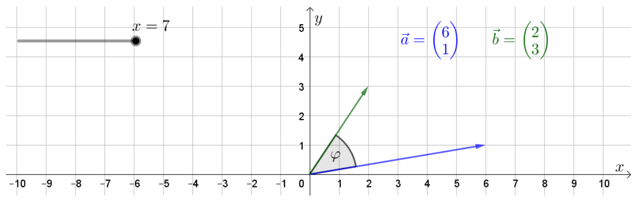
Berechne alle Werte von x so, dass ...

1) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel sind.

2) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen rechten Winkel einschließen.

3) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen spitzen Winkel einschließen.

4) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen stumpfen Winkel einschließen.



1) Damit $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ gilt, muss $r = 3$ sein.

$$3 \cdot (x-1) = x - 5 \iff 3 \cdot x - 3 = x - 5 \iff 2 \cdot x = -2 \iff x = -1$$

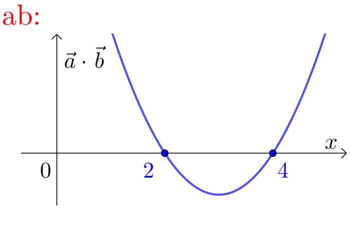
Für das Skalarprodukt der beiden Vektoren gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x-1) \cdot (x-5) + 3 = x^2 - 6 \cdot x + 8$

2) $\varphi = 90° \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0 \iff x = 2$ oder $x = 4$

Das Vorzeichen von $\vec{a} \cdot \vec{b} = x^2 - 6 \cdot x + 8 = (x-2) \cdot (x-4)$ hängt von x ab:

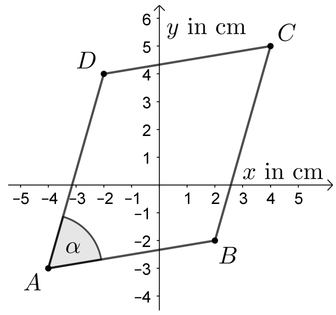
3) φ spitz $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \iff x < 2$ oder $x > 4$

4) φ stumpf $\iff \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \iff 2 < x < 4$



Parallelogramm

Das dargestellte Parallelogramm hat die Eckpunkte $A = (-4 \mid -3)$, $B = (2 \mid -2)$, C und $D = (-2 \mid 4)$.



1) Berechne den Eckpunkt C.

2) Berechne den eingezeichneten Winkel α.

3) Berechne den Flächeninhalt F des Parallelogramms mit der trigonometrischen Flächenformel.

1) $C = B + \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = (4 \mid 5)$

2) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{6^2 + 1^2} = \sqrt{37}$

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \implies |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53}$

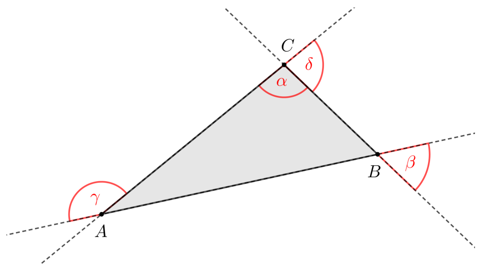
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 12 + 7 = 19$

$$\implies \alpha = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{37} \cdot \sqrt{53}}\right) = 64{,}59\ldots°$$

3) $F = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \sin(\alpha) = 40\,\text{cm}^2$

Gleicher Anfangspunkt

Zeichne rechts jeweils einen Winkel α, β, γ bzw. δ ein, der mit der angegebenen Formel berechnet wird.



$$\alpha = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right) \qquad \gamma = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|}\right)$$

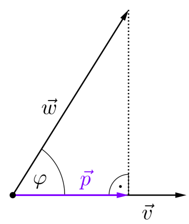
$$\beta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right) \qquad \delta = \arccos\left(\frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{CB}|}\right)$$

Hinweis: Finde jeweils einen geeigneten Anfangspunkt für die beiden Vektoren.

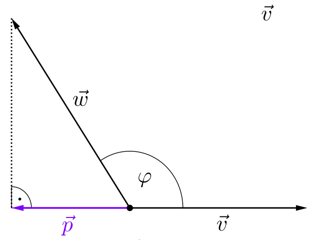
Normalprojektion

Neben dem Vorzeichen hat auch der Betrag des Skalarprodukts $\vec{v} \cdot \vec{w}$ eine geometrische Bedeutung.
Aus der Vektor-Winkel-Formel folgt: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)}$

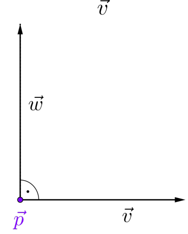
i) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen spitzen Winkel φ ein.
Der eingezeichnete Vektor $\vec{p}$ ist die sogenannte Normalprojektion von $\vec{w}$ auf $\vec{v}$.
Im rechtwinkeligen Dreieck gilt: $|\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = |\vec{p}|$
In diesem Fall gilt also: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{p}|}$



ii) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen stumpfen Winkel φ ein.
Im rechtwinkeligen Dreieck gilt: $|\vec{w}| \cdot \cos(180° - \varphi) = |\vec{p}|$
Aus dem Einheitskreis folgt, dass $\cos(180° - \varphi) = -\cos(\varphi)$ gilt.
In diesem Fall gilt also: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = -|\vec{v}| \cdot |\vec{p}|}$

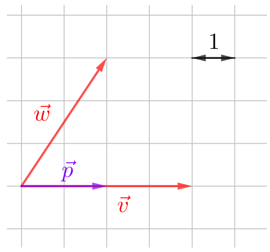


iii) Rechts schließen die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ einen rechten Winkel ein.
In diesem Fall gilt: $\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = 0}$
Die Normalprojektion $\vec{p}$ ist in diesem Fall der Nullvektor mit der Länge 0.



Normalprojektion

Wir überprüfen $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{p}|$ für die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Stelle dazu die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ rechts mit gleichem Anfangspunkt dar.
Trage dann die richtigen Zahlen in die Kästchen ein:

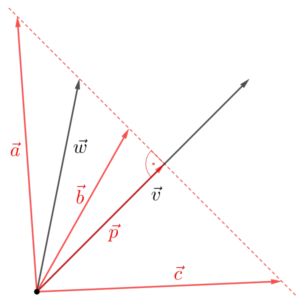


$\vec{v} \cdot \vec{w} = 8$

$|\vec{v}| = 4 \qquad |\vec{p}| = 2 \quad \Longrightarrow \quad |\vec{v}| \cdot |\vec{p}| = 8$ ✓

Geometrische Interpretation von $\vec{v} \cdot \vec{w}$

Wie kannst du den Vektor $\vec{w}$ rechts unten ändern, *ohne* dass sich das Skalarprodukt $\vec{v} \cdot \vec{w}$ verändert?
Zeichne rechts drei verschiedene Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ ein, für die gilt:



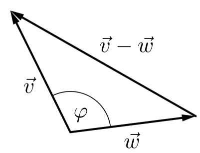
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot \vec{a} = \vec{v} \cdot \vec{b} = \vec{v} \cdot \vec{c}$$

Es gilt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = |\vec{v}| \cdot |\vec{p}|$

Wenn $\vec{v}$ gleich bleibt und $\vec{v} \cdot \vec{w}$ gleich bleiben soll,
muss also die Länge der Normalprojektion $\vec{p}$ gleich bleiben.

Herleitung der Vektor-Winkel-Formel

Rechts sind die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ mit *gleichem* Anfangspunkt eingezeichnet.
Aus $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$ folgt, dass der Vektor $\vec{v} - \vec{w}$
die Spitze von $\vec{w}$ mit der Spitze von $\vec{v}$ verbindet.



Zur Herleitung der Vektor-Winkel-Formel berechnen wir $|\vec{v} - \vec{w}|^2$ auf zwei verschiedene Arten:

1) Berechnung mit der Formel für die Länge eines Vektors:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 = \left|\begin{pmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{pmatrix}\right|^2 &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = \\ &= v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot w_1 + w_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot w_2 + w_2^2 = \\ &= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot \underbrace{(v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2)}_{= \vec{v} \cdot \vec{w}} \end{aligned}$$

2) Berechnung mit dem Cosinussatz:

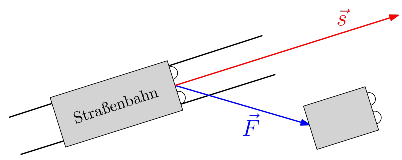
$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir die behauptete Vektor-Winkel-Formel:

$$\Longrightarrow \quad |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Arbeit

Wirkt auf einen Körper bei der Bewegung entlang eines Vektors $\vec{s}$
eine konstante Kraft $\vec{F}$, dann ist das Skalarprodukt



$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{s}}$$

die dabei verrichtete **Arbeit** $\boldsymbol{W}$. Mehr dazu am Arbeitsblatt – Kraftvektoren.