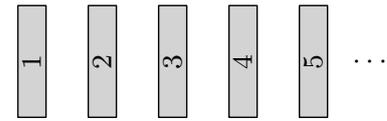


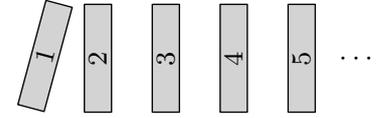
Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ haben wir einen Dominostein, der mit n beschriftet ist.



Wir stellen die Dominosteine in aufsteigender Reihenfolge auf. Angenommen, wir haben die folgenden beiden Informationen:

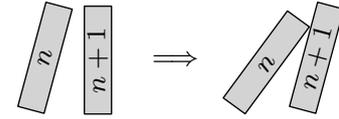


- 1) Der Dominostein mit der Zahl 1 fällt um.
- 2) Für jede Zahl $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ gilt:
Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt,
dann fällt auch der Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.



Erkläre, warum dann der Dominostein mit der Zahl 42 sicher umfällt.

Schließlich fällt jeder Dominostein um.



Der erste Stein fällt um.

Deshalb fällt der zweite Stein um.

Deshalb fällt der dritte Stein um.

⋮

Deshalb fällt der Stein mit der Zahl 41 um.

Deshalb fällt der Stein mit der Zahl 42 um.

$n = 1$

$n = 2$

$n = 40$

$n = 41$

Die **vollständige Induktion** ist eine Beweistechnik, die auf diesem Dominoeffekt aufbaut.

Wenn wir zum Beispiel beweisen wollen, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{=10} = \frac{4 \cdot 5}{\underbrace{2}_{=10}} \checkmark$

für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt, dann überprüfen wir Folgendes:

- 1) **Induktionsanfang:** Die Formel gilt für $n = 1$. Der erste Dominostein fällt um.
- 2) **Induktionsschritt:** Wenn die Formel für n gilt, dann gilt auch die Formel für $n + 1$. $n \geq 1$
Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt, dann fällt auch der nächste Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.

1) Überprüfe den **Induktionsanfang** für $n = 1$:

Linke Seite: 1 Rechte Seite: $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1 \checkmark$

2) Überprüfe den **Induktionsschritt** $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 1$:

Du darfst also verwenden, dass $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$ gilt.

Das ist die sogenannte **Induktionsvoraussetzung**.

Daraus musst du folgern, dass auch $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$ gilt.

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1) = (n + 1) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}_{=\frac{n+2}{2}} = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2} \checkmark$$

Damit ist bewiesen, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \dots$ gilt.

Summe der ersten n ungeraden Zahlen  **MmF**

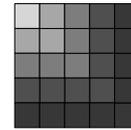
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 1)}_{n \text{ Summanden}} = n^2$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Zum Beispiel: $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9}_{=25} = \underbrace{5^2}_{=25} \checkmark$

Alternativer geometrischer Beweis:



1) Induktionsanfang $n = 1$:

$$1 \stackrel{?}{=} 1^2 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 1$:

Linke Seite: $1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 1) + (2 \cdot n + 1) = n^2 + 2 \cdot n + 1$

Rechte Seite: $(n + 1)^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 \checkmark$

Summe der ersten n Quadratzahlen  **MmF**

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + \frac{1}{2})}{3}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

1) Induktionsanfang $n = 1$:

$$1^2 \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{1 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}}{3}}_{=1} \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + \frac{1}{2})}{3} + (n + 1)^2 = (n + 1) \cdot \left[\frac{n \cdot (n + \frac{1}{2})}{3} + n + 1 \right]$$

Zu zeigen ist also, dass $\frac{n \cdot (n + \frac{1}{2})}{3} + n + 1 = \frac{(n + 2) \cdot (n + \frac{3}{2})}{3}$ gilt.

Linke Seite: $\frac{n \cdot (n + \frac{1}{2})}{3} + n + 1 = \frac{n^2 + \frac{1}{2} \cdot n + 3 \cdot n + 3}{3} = \frac{n^2 + \frac{7}{2} \cdot n + 3}{3}$

Rechte Seite: $\frac{n^2 + \frac{3}{2} \cdot n + 2 \cdot n + 3}{3} = \frac{n^2 + \frac{7}{2} \cdot n + 3}{3} \checkmark$



Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2, \quad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$a_n = \frac{4^n - 4}{6}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} a_2 &= 4 \cdot a_1 + 2 = 2 \\ a_3 &= 4 \cdot a_2 + 2 = 10 \\ a_4 &= 4 \cdot a_3 + 2 = 42 \\ &\vdots \end{aligned}$$

1) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\text{Linke Seite: } a_1 = 0 \quad \text{Rechte Seite: } \frac{4^1 - 4}{6} = 0 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 1$:

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2 = 4 \cdot \frac{4^n - 4}{6} + 2 = \frac{4^{n+1} - 16}{6} + \frac{12}{6} = \frac{4^{n+1} - 4}{6} \checkmark$$



Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ ist rekursiv definiert:

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Der Induktionsanfang ist in dieser Aufgabe also bei $n = 2$.

Es gilt also:

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + f_1 = 2 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 3 \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$

1) Induktionsanfang $n = 2$:

$$\text{Linke Seite: } f_3 \cdot f_1 - f_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1 \quad \text{Rechte Seite: } (-1)^2 = 1 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n-1}) = \\ &= \cancel{f_{n+1} \cdot f_n} + f_n^2 - \cancel{f_{n+1} \cdot f_n} - f_{n+1} \cdot f_{n-1} = \\ &= f_n^2 - f_{n+1} \cdot f_{n-1} = \\ &= (-1) \cdot (f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2) = \\ &= (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1} \checkmark \end{aligned}$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$3^n \geq n^3$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt.

Hinweis: Überlege im Induktionsschritt, warum für $n \geq 3$ die Ungleichungen $3 \cdot n^2 \leq n^3$ und $3 \cdot n + 1 \leq n^3$ gelten.

1) Induktionsanfang $n = 3$:

$$\text{Linke Seite: } 3^3 \quad \text{Rechte Seite: } 3^3 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 3$:

$$\text{Rechte Seite: } (n + 1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Es gilt $3 \cdot n^2 \leq n^3$, weil $3 \leq n$.

Es gilt $3 \cdot n + 1 \leq 4 \cdot n \leq n^3$, weil $4 \leq n^2$.

$$\implies (n + 1)^3 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3 \cdot n^3 \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1} \checkmark$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die **Bernoulli-Ungleichung**

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad x \geq -1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt.

1) Induktionsanfang $n = 0$:

$$\text{Linke Seite: } (1 + x)^0 = 1 \quad \text{Rechte Seite: } 1 + 0 \cdot x = 1 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x) \cdot (1 + x)^n \geq \\ &\geq (1 + x) \cdot (1 + n \cdot x) = \\ &= 1 + n \cdot x + x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \geq \\ &\geq 1 + (n + 1) \cdot x \checkmark \end{aligned}$$

An welcher Stelle im Beweis verwendest du die Voraussetzung $x \geq -1$?

