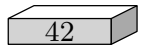


## Dominoeffekt

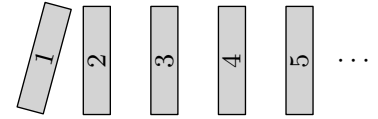
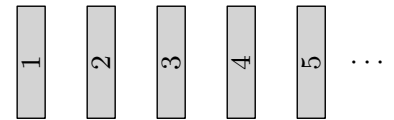


Zu jeder natürlichen Zahl  $n \geq 1$  haben wir einen Dominostein, der mit  $n$  beschriftet ist.



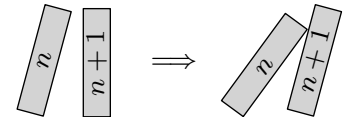
Wir stellen die Dominosteine in aufsteigender Reihenfolge auf. Angenommen, wir haben die folgenden beiden Informationen:

- 1) Der Dominostein mit der Zahl 1 fällt um.
- 2) Für jede Zahl  $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$  gilt:  
Wenn der Dominostein mit der Zahl  $n$  umfällt,  
dann fällt auch der Dominostein mit der Zahl  $n + 1$  um.



Erkläre, warum dann der Dominostein mit der Zahl 42 sicher umfällt.

Schließlich fällt jeder Dominostein um.



## Vollständige Induktion



Die **vollständige Induktion** ist eine Beweistechnik, die auf diesem Dominoeffekt aufbaut.

Wenn wir zum Beispiel beweisen wollen, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + n}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Zum Beispiel:  $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{=10} = \underbrace{\frac{4 \cdot 5}{2}}_{=10} \checkmark$

für alle natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt, dann überprüfen wir Folgendes:

- 1) **Induktionsanfang:** Die Formel gilt für  $n = 1$ . Der erste Dominostein fällt um.
- 2) **Induktionsschritt:** Wenn die Formel für  $n$  gilt, dann gilt auch die Formel für  $n + 1$ .  $n \geq 1$   
Wenn der Dominostein mit der Zahl  $n$  umfällt, dann fällt auch der nächste Dominostein mit der Zahl  $n + 1$  um.

- 1) Überprüfe den **Induktionsanfang** für  $n = 1$ :

- 2) Überprüfe den **Induktionsschritt**  $n \rightarrow n + 1$  für  $n \geq 1$ :

Du darfst also verwenden, dass  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$  gilt.

Das ist die sogenannte **Induktionsvoraussetzung**.

Daraus musst du folgern, dass auch  $1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{(n + 1) \cdot (n + 2)}{2}$  gilt.

Damit ist bewiesen, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen  $n = 1, 2, 3, \dots$  gilt.

Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen

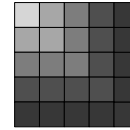
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 1)}_{n \text{ Summanden}} = n^2$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt.

Zum Beispiel:  $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9}_{=25} = \underbrace{5^2}_{=25} \checkmark$

Alternativer geometrischer Beweis:

Summe der ersten  $n$  Quadratzahlen

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + \frac{1}{2})}{3}$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt.



Die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2, \quad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$a_n = \frac{4^n - 4}{6}$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 1$  gilt.

Es gilt also:

$$a_2 = 4 \cdot a_1 + 2 = 2$$

$$a_3 = 4 \cdot a_2 + 2 = 10$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 + 2 = 42$$

$\vdots$



Die Fibonacci-Folge  $(f_n)_{n \geq 1}$  ist rekursiv definiert:

$$f_1 = 1, f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \quad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  gilt.

Es gilt also:

$$f_3 = f_2 + f_1 = 2$$

$$f_4 = f_3 + f_2 = 3$$

$$f_5 = f_4 + f_3 = 5$$

$\vdots$

Der Induktionsanfang ist in dieser Aufgabe also bei  $n = 2$ .



Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$3^n \geq n^3$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 3$  gilt.

Hinweis: Überlege im Induktionsschritt, warum für  $n \geq 3$  die Ungleichungen  $3 \cdot n^2 \leq n^3$  und  $3 \cdot n + 1 \leq n^3$  gelten.



Zeige mit vollständiger Induktion, dass die **Bernoulli-Ungleichung**

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad x \geq -1$$

für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 0$  gilt.

An welcher Stelle im Beweis verwendest du die Voraussetzung  $x \geq -1$ ?

