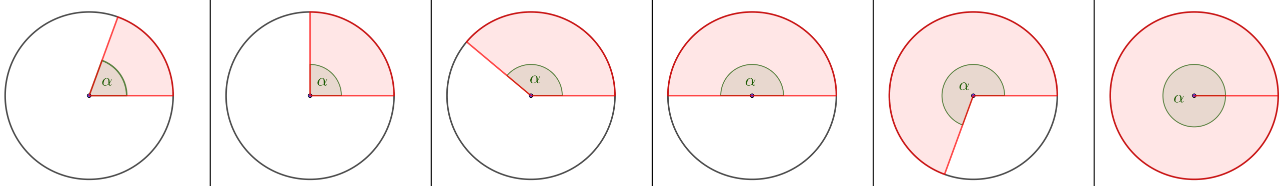
Gradmaß & Winkelarten

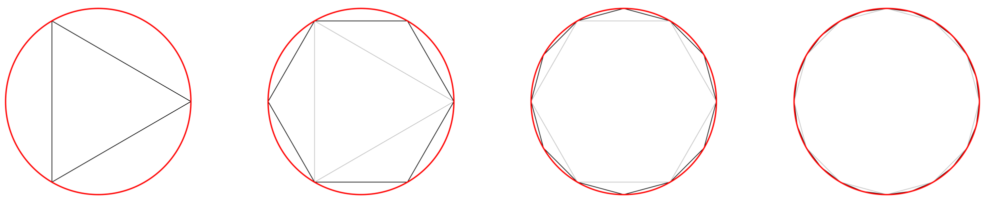
Ein **Kreissektor** wird durch zwei Radien und einen **Kreisbogen** begrenzt.
Der von den beiden Radien eingeschlossene Winkel im Kreissektor heißt **Zentriwinkel**.
Schon vor tausenden Jahren wurde festgelegt, dass der volle Kreisbogen den Winkel 360° aufspannt.
Alle Winkel α mit $0° < \alpha \leq 360°$ werden nach ihrer Größe in die folgenden Arten eingeteilt:



Spitzer Winkel	Rechter Winkel	Stumpfer Winkel	Gestreckter Winkel	Erhabener Winkel	Voller Winkel
$\square < \alpha < \square$	$\alpha = \square$	$\square < \alpha < \square$	$\alpha = \square$	$\square < \alpha < \square$	$\alpha = \square$

Kreis

Wir nähern den Umfang u und den Flächeninhalt A eines Kreises mit Radius r an.
Dazu schreiben wir ihm regelmäßige Vielecke ein:



Regelmäßiges ...	Umfang
3-Eck	$5{,}196\ldots \cdot r$
6-Eck	$6 \cdot r$
12-Eck	$6{,}211\ldots \cdot r$
24-Eck	$6{,}265\ldots \cdot r$
48-Eck	$6{,}278\ldots \cdot r$
96-Eck	$6{,}282\ldots \cdot r$

Mit jeder Verdopplung der Seitenanzahl vergrößern wir den Umfang des Vielecks. Der Umfang der Vielecke bleibt jedoch stets kleiner als der Kreisumfang. Die kürzeste Verbindung zweier Punkte ist die Strecke.

Mithilfe der irrationalen **Kreiszahl $\pi = 3{,}1415926\ldots$** können wir den *exakten* **Kreisumfang u** bzw. **Flächeninhalt A** angeben:

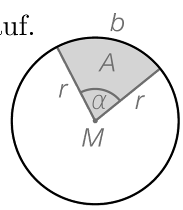
$$u = \underbrace{2 \cdot \pi}_{=6{,}283\ldots} \cdot r \quad \text{bzw.} \quad A = \pi \cdot r^2$$

Zwischen diesen beiden Formeln besteht ein Zusammenhang. Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Lokale Änderungsrate.

Kreisbogen

Rechts unten ist ein Kreissektor mit Radius r und Zentriwinkel α im Gradmaß dargestellt.
Stelle mithilfe von r und α eine Formel für die Länge b des zugehörigen **Kreisbogens** auf.

$b = \square$



Radius ∝ Kreisbogenlänge

Ein Kreissektor mit Radius r hat den Zentriwinkel $\alpha = 30°$.
Berechne jeweils die Kreisbogenlänge für ... **1)** $r = 4\,\text{cm}$. **2)** $r = 8\,\text{cm}$.

Wenn der Zentriwinkel gleich bleibt, dann sind der Radius und die Kreisbogenlänge zueinander direkt proportional.

Zentriwinkel ∝ Kreisbogenlänge

Ein Kreissektor mit Radius $r = 3\,\text{cm}$ hat den Zentriwinkel α.
Berechne jeweils die Kreisbogenlänge für … **1)** $\alpha = 60°$. **2)** $\alpha = 120°$.

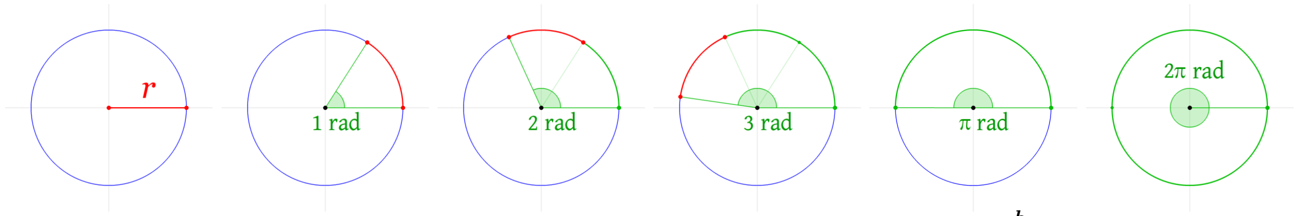
Wenn der Radius gleich bleibt, dann sind der Zentriwinkel und die Kreisbogenlänge zueinander direkt proportional.

Bogenmaß (Radiant)

Wenn wir einen Zentriwinkel im **Bogenmaß** angeben, fragen wir:

„Wie oft passt der Radius in den Kreisbogen?" Stelle dir dazu den Radius als Schnur vor, die gebogen werden kann.

1 rad ist jener Zentriwinkel, bei dem der Kreisbogen gleich lang wie der Radius ist.
x rad ist jener Zentriwinkel, bei dem der Kreisbogen die Länge $x \cdot r$ hat. $u = 2 \cdot \pi \cdot r$



Der Kreissektor mit **Radius** $\boldsymbol{r}$ und **Bogenlänge** $\boldsymbol{b}$ hat also den **Zentriwinkel** $\boldsymbol{\frac{b}{r}}$ **rad**.

Umrechnung zwischen Bogenmaß und Gradmaß

In den vollen Kreisumfang u passt der Radius r genau $\boxed{}$ Mal. Vervollständige die Tabelle.

Gradmaß	360°	180°	90°	1°	
Bogenmaß	$2 \cdot \pi$ rad				1 rad

Um einen Winkel vom Bogenmaß (rad) in das Gradmaß (°) umzuwandeln,

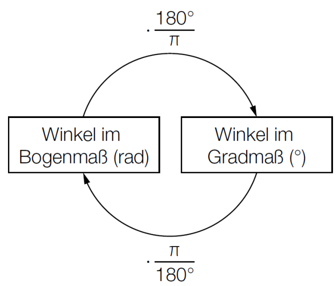
multipliziere mit dem Umrechungsfaktor $\underbrace{\frac{180°}{\pi\,\text{rad}}}_{=1}$, zum Beispiel:

$$2\,\text{rad} = 2\,\text{rad} \cdot \frac{180°}{\pi\,\text{rad}} = \boxed{}$$

Um einen Winkel vom Gradmaß (°) in das Bogenmaß (rad) umzuwandeln,

multipliziere mit dem Umrechungsfaktor $\underbrace{\frac{\pi\,\text{rad}}{180°}}_{=1}$, zum Beispiel:

$$42° = 42° \cdot \frac{\pi\,\text{rad}}{180°} = \boxed{}$$



Du legst mit 42 m Seil einen Kreissektor mit dem Radius $r = 10\,\text{m}$. Fertige eine Skizze an.
Berechne den Zentriwinkel des Kreissektors … **1)** im Bogenmaß. **2)** im Gradmaß.