Äquivalenzumformungen

Erinnere dich, dass **Äquivalenzumformungen** die Lösungen einer Gleichung *nicht* verändern:

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

die gleiche Lösung $\boxed{}$.

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 12 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$$

die gleichen Lösungen $\boxed{}$ und $\boxed{}$.

Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$\frac{x}{4} = -2 \quad \text{und} \quad x = 4 \cdot (-2)$$

die gleiche Lösung $\boxed{}$.

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

die gleiche Lösung $\boxed{}$.

Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung

Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung.
Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben, zum Beispiel:

Die Gleichung $x = -3$ hat nur eine Lösung, nämlich $\boxed{}$.

Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich $\boxed{}$ und $\boxed{}$.

Die Lösungen der quadradrierten Gleichung sind nur Lösungskandidaten der ursprünglichen Gleichung.
Mit einer Probe können wir feststellen, welche Lösungskandidaten auch tatsächlich Lösungen sind.

Wurzelgleichungen lösen

Wir lösen die Wurzelgleichung $2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

1) Zuerst isolieren wir den Wurzelausdruck mit Äquivalenzumformungen auf einer Seite:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42 \iff 2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 10 \iff \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5$$

2) Dann quadrieren wir beide Seiten und lösen die quadrierte Gleichung:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5 \implies 3 - 2 \cdot x = 25 \iff 3 - 25 = 2 \cdot x \iff x = -11$$

Das Symbol $\implies$ bedeutet hier: „Jede Lösung der linken Gleichung ist auch eine Lösung der rechten Gleichung.“
Das Symbol $\iff$ bedeutet hier zusätzlich: „Auch jede Lösung der rechten Gleichung ist eine Lösung der linken Gleichung.“

Der einzige Lösungskandidat dieser Wurzelgleichung ist also -11.

3) Mit einer Probe testen wir, ob -11 tatsächlich eine Lösung der Wurzelgleichung ist.
Dazu setzen wir den Lösungskandidaten -11 in eine Gleichung *vor* dem Quadrieren ein:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (-11)} = \sqrt{25} = 5 \checkmark$$

Bis zum Quadrieren haben wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt.
Die Zahl -11 ist bei diesem Beispiel also auch eine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung.
Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt damit: $L = \{-11\}$

Scheinlösungen

Bei Wurzelgleichungen muss nicht jeder Lösungskandidat auch eine Lösung sein.

a) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$5 + \sqrt{11 - x} = 3 \qquad \mid -5$$

$$\boxed{} = \boxed{} \qquad \mid (\ldots)^2$$

$$\boxed{} = \boxed{} \qquad \mid +x-4$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

Wenn die Probe verschiedene Ergebnisse auf den beiden Seiten liefert,
dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

b) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\sqrt{18 - 5 \cdot x} = \sqrt{2 \cdot x - 10} \qquad \mid (\ldots)^2$$

$$\boxed{} = \boxed{} \qquad \mid +5 \cdot x + 10$$

$$\boxed{} = \boxed{} \qquad \mid :7$$

$$\boxed{} = \boxed{}$$

Wenn die Probe einen undefinierten Wurzelausdruck (z.B. $\sqrt{-4}$) liefert,
dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Wir nennen Lösungskandidaten, die *keine* Lösungen sind, auch **Scheinlösungen**.

Scheinlösungen

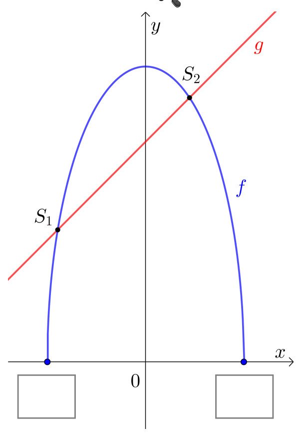
Löse die Gleichung $\dfrac{-2 \cdot \sqrt{6 + 2 \cdot x}}{3} = 4$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Halbe Ellipse – Gerade

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 5$$

sind rechts dargestellt.



1) Berechne die Nullstellen von f, und trage sie rechts in die Kästchen ein.

2) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

Trapez

Rechts ist ein rechtwinkeliges Trapez (nicht maßstabsgetreu) dargestellt.
Für die Seitenlängen x und y gilt: $x + y = 12$
Berechne die Seitenlängen x und y.