Zehnerpotenzen

Statt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ schreiben wir kürzer 10^7.

Allgemein schreiben wir: $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

Die Zahl 10 heißt **Basis** der **Zehnerpotenz** $\mathbf{10^n}$. Die Zahl n heißt **Exponent**.

Rechenregeln für Zehnerpotenzen

Trage jeweils den richtigen Exponenten in das Kästchen ein.

1) $10^3 \cdot 10^2 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) = 10^5$ — Allgemein gilt: $\mathbf{10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}}$

2) $\dfrac{10^7}{10^3} = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{10}} = 10^4$ — Allgemein gilt: $\mathbf{\dfrac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}}$

3) $\left(10^2\right)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^6$ — Allgemein gilt: $\mathbf{(10^x)^y = 10^{x \cdot y}}$

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Welche Zahlen sind 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …? Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

10^3	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^2	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^1	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^0	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^{-1}	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^{-2}	$\xleftarrow{\cdot 10}$ / $\xrightarrow{: 10}$	10^{-3}
1000		100		10		1		0,1		0,01		0,001
								$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{100}$		$\frac{1}{1000}$
								$\frac{1}{10^1}$		$\frac{1}{10^2}$		$\frac{1}{10^3}$

Merke: **i)** $10^n = 1\underbrace{0 \cdots 0}_{n \text{ 0er}}$ **ii)** $10^0 = 1$ **iii)** $10^{-n} = \underbrace{0,0 \cdots 0}_{n \text{ 0er}}1 = \dfrac{1}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Damit gelten alle Rechenregeln für Zehnerpotenzen auch mit ganzzahligen Exponenten.

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Ordne die Zahlen der Größe nach: $0,\ 10^2,\ 10^{-2},\ -10^2,\ -10^{-2},\ 10^3,\ 10^{-3},\ -10^3,\ -10^{-3}$

$$-10^3 < -10^2 < -10^{-2} < -10^{-3} < 0 < 10^{-3} < 10^{-2} < 10^2 < 10^3$$

Rechenregeln für Zehnerpotenzen

Schreibe das Ergebnis als Zehnerpotenz an.

a) $\dfrac{10^4 \cdot 10^2}{10^3} = \dfrac{10^6}{10^3} = 10^3$

b) $\dfrac{10^{-2} \cdot 10^5}{10^{-4}} = \dfrac{10^3}{10^{-4}} = 10^7$

c) $\left(10^{-3}\right)^2 \cdot 10^0 = 10^{-6}$

d) $10 \cdot \left(10^{-2}\right)^{-4} = 10 \cdot 10^8 = 10^9$

Dezimalsystem

Im **Dezimalsystem** entspricht jeder Stelle eine Zehnerpotenz. Zum Beispiel gilt für die **Dezimalzahl** 4287,023:

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
4	2	8	7 ,	0	2	3

$$4287{,}023 = 4 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + 0 \cdot 0{,}1 + 2 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}001 =$$
$$= 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

Dezimalsystem

Stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-3} = 302{,}509$

b) $1 \cdot 10^{-3} + 1 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-4} + 4 \cdot 10^{-2} = 3{,}1415$

Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein, und stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

$$4287{,}023 \cdot 10^2 = (4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^2 =$$
$$= 4 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^{-1} =$$
$$= 428702{,}3$$

Merke: Eine Multiplikation mit 10^n verschiebt das Komma um n Stellen nach *rechts* ($n \in \mathbb{N}$).

$$4287{,}023 \cdot 10^{-2} = (4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}) \cdot 10^{-2} =$$
$$= 4 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 3 \cdot 10^{-5} =$$
$$= 42{,}87023$$

Merke: Eine Multiplikation mit 10^{-n} verschiebt das Komma um n Stellen nach *links* ($n \in \mathbb{N}$).

Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) $4{,}2 \cdot 10^4 = 42\,000$ **b)** $10{,}3 \cdot 10^{-5} = 0{,}000\,103$ **c)** $-10{,}8 \cdot 10^3 = -10\,800$

Besondere Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Exponenten in die Kästchen ein.

1 Million $= 1\,000\,000 = 10^6$

1 Milliarde $= 1\,000\,000\,000 = 10^9$

1 Prozent $= 1\,\% = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$

1 Promille $= 1\,‰ = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{-3}$

1 part per million $= 1$ ppm $= \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6}$

Besondere Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein, und stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) $0{,}08$ Millionen $= 0{,}08 \cdot 10^6 = 80\,000$

b) $42\,\% = 42 \cdot 10^{-2} = 0{,}42$

c) $0{,}2\,‰ = 0{,}2 \cdot 10^{-3} = 0{,}0002$

d) 5000 ppm $= 5000 \cdot 10^{-6} = 0{,}05$

Astronomische Einheit

Die mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne beträgt rund 149 597 870 700 m.
Trage den richtigen Exponenten in das Kästchen ein:

$$149\,597\,870\,700\,\text{m} = 1{,}495\,978\,707 \cdot 10^{11}\,\text{m}$$

Gib die Zahl 149 597 870 700 in deinen Taschenrechner ein, drücke die Taste $\boxed{=}$ und vergleiche.

Gleitkommadarstellungen

Trage jeweils den richtigen Exponenten in das Kästchen ein:

$$8315 = 8315 \cdot 10^{0} = 831{,}5 \cdot 10^{1} = 83{,}15 \cdot 10^{2} = 8{,}135 \cdot 10^{3} = 0{,}8135 \cdot 10^{4}$$

Das Komma „gleitet" beim Multiplizieren mit Zehnerpotenzen zwischen den Stellen.
Wir sprechen deshalb auch von **Gleitkommadarstellungen** der Zahl 8315.

Der Taschenrechner verwendet die Gleitkommadarstellung $\pm a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ mit $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Es ist also genau eine Ziffer links vom Komma. Diese Ziffer ist $\neq 0$. Zum Beispiel: $149\,597\,870\,700 = 1{,}495... \cdot 10^{11}$

Rechnen mit Gleitkommadarstellungen

Berechne das Ergebnis ohne Taschenrechner. Trage dazu die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

a) $50\,000 \cdot 0{,}03 = 5 \cdot 10^{4} \cdot 3 \cdot 10^{-2} = 15 \cdot 10^{2} = 1500$

b) $0{,}001^4 = (10^{-3})^4 = 10^{-12}$

c) $\dfrac{0{,}014 \cdot 30}{0{,}07} = \dfrac{14 \cdot 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{1}}{7 \cdot 10^{-2}} = 6 \cdot 10^{0} = 6$

42^{42}

Berechne mit dem Taschenrechner: $42^{42} = \underbrace{42 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 42}_{\text{42 Faktoren}} = 1{,}501\,309... \cdot 10^{68}$

Die Zahl ist so groß, dass der Taschenrechner nur ein gerundetes Ergebnis angeben kann.
Wie viele Stellen hat das exakte Ergebnis?

$42^{42} = 1{,}501\,309... \cdot 10^{68} = \underbrace{1501309\cdots}_{\text{69 Stellen}}$ ist eine natürliche Zahl mit 69 Stellen.

Überschlagsrechnung

Trage ohne Taschenrechner die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.
Für die Anzahl an Sekunden pro Jahr gilt: $1\,\text{Jahr} = \underbrace{365}_{\approx 4\cdot 10^2} \cdot \underbrace{24}_{\approx 2\cdot 10^1} \cdot \underbrace{60 \cdot 60}_{\approx 4\cdot 10^3}\,\text{s} \approx 3 \cdot 10^{7}\,\text{s}$

Die Sonne verliert pro Sekunde durch Energieabstrahlung rund 4 Millionen Tonnen an Masse, also:

$$4 \cdot 10^{6}\,\frac{\text{t}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^{9}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{17}\,\frac{\text{kg}}{\text{Jahr}}$$

In den nächsten 5 Milliarden Jahren verliert die Sonne durch Energieabstrahlung also rund

$$6 \cdot 10^{26}\,\text{kg}$$

an Masse. Ihre derzeitige Masse beträgt übrigens rund $2 \cdot 10^{30}$ kg, also mehr als das 1000-fache dieses Masseverlusts.