Sparbuch

Das Kapital auf einem Sparbuch wächst exponentiell.
Zu Beginn ($n = 0$) befinden sich 150 € auf dem Sparbuch. Pro Jahr wächst das Kapital um 2 %.

a) Berechne das Kapital nach 8 Jahren.

$$150 \cdot \underbrace{1{,}02 \cdot 1{,}02 \cdot \ldots \cdot 1{,}02}_{\text{8 Faktoren}} = 150 \cdot 1{,}02^8 \approx 175{,}75 \text{ €}.$$

b) Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren abgekürzt. Stelle eine Formel für b_n auf.

$$b_n = 150 \cdot 1{,}02^n$$

(b_n) ist also eine geometrische Folge mit Quotient $q = 1{,}02$.

c) Berechne die Verdopplungszeit.

$$150 \cdot 1{,}02^n = 300 \quad \iff \quad 1{,}02^n = 2 \quad \iff \quad n = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}02)} = 35{,}0\ldots \text{ Jahre}$$

Finanzmathematik

Wir verwenden folgende Begriffe und Abkürzungen aus der Finanzmathematik:

- Die Multiplikation mit der Zahl $q = 1{,}02$ vergrößert das Kapital um 2 % Zinsen.
  Die Zahl $\boldsymbol{q}$ nennen wir deshalb auch **Aufzinsungsfaktor**.
  Den zugehörigen **Zinssatz** 2 % kürzen wir mit $\boldsymbol{i}$ ab. „interest“ ist englisch für Zinsen.
- Die Abkürzung **p. a.** („per annum“) bedeutet übersetzt „pro Jahr“.
  Ist ein Sparbuch mit „2 % p. a.“ verzinst, zahlt die Bank also pro Jahr 2 % Zinsen.
- Die Kapitalertragssteuer (kurz: **KESt**) beträgt in Österreich 25 %.
  Von den Zinsen zahlt die Bank somit 25 % als Steuer an den Staat.
  Die anderen 75 % der Zinsen bleiben der sparenden Person tatsächlich übrig.
- Bewirbt eine Bank ein Sparbuch mit dem Zinssatz „2 % p. a.“, wächst das Kapital wegen der KESt nicht um 2 % pro Jahr, sondern um $2\,\% \cdot 0{,}75 = 1{,}5\,\%$. Dieser tatsächliche Zinssatz nach Berücksichtigung aller Abgaben wird auch **effektiver Zinssatz** genannt.

Zinssatz

Innerhalb von 8 Jahren wächst das Kapital $K = 3000$ € auf einem Sparbuch mit fixem Zinssatz um insgesamt 334 €. Berechne den jährlichen Zinssatz i vor Abzug der KESt.

Aufzinsungsfaktor q berechnen:

$$3000 \cdot q^8 = 3334 \implies q = \sqrt[8]{\frac{3334}{3000}} = 1{,}013\,28\ldots = 101{,}328\ldots\,\%$$

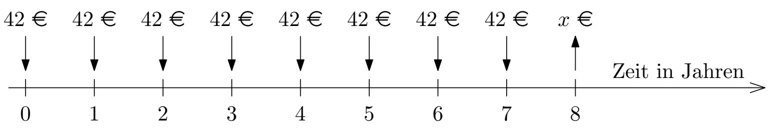
$\implies$ effektiver Zinssatz pro Jahr: 1,328...%

Zinssatz i vor Abzug der KESt berechnen:

$$i \cdot 0{,}75 = 1{,}328\ldots\% \implies i = \frac{1{,}328\ldots\%}{0{,}75} = 1{,}771\ldots\%$$

Zeitachse

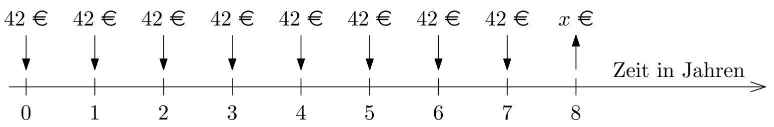
Ein- und Auszahlungen auf ein Konto können wir auf einer **Zeitachse** veranschaulichen, zum Beispiel:



Zum Zeitpunkt 0 zahlst du 42 € ein.
Über die nächsten 7 Jahre zahlst du jährlich weitere 42 € ein.
Nach 8 Jahren lässt du dir x € auszahlen.

Vorschüssige Rente – Endwert

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 0,8 % p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren lässt du dir das vollständige Guthaben x € auszahlen. Das ist der sogenannte **Endwert**.

1) Berechne den Aufzinsungsfaktor $q = \boxed{}$

Um den Endwert zu berechnen, behandeln wir jede Einzahlung wie ein eigenes Sparbuch:

2) Die zum Zeitpunkt 0 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^8 = b_8$.

Die zum Zeitpunkt 1 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^7 = b_7$.

Die zum Zeitpunkt 2 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^6 = b_6$.

$\vdots$ $\vdots$

Die zum Zeitpunkt 7 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q = b_1$.

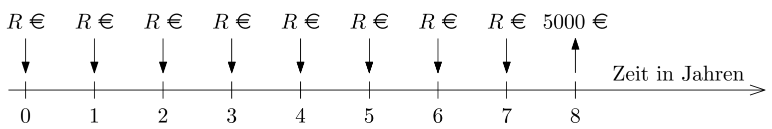
Beachte, dass die 8 Werte $(b_1; b_2; \ldots; b_8)$ eine geometrische Folge mit Quotient q bilden.

3) Berechne mithilfe der Summenformel für geometrische Folgen den Endwert des Sparplans.

$$s_8 = b_1 + b_2 + \cdots + b_8 = b_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 348{,}32\ldots\ €$$

Vorschüssige Rente – Rate

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 1,3 % p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren möchtest du dir den Endwert $E = 5000$ € auszahlen lassen.
Berechne die dafür notwendige jährliche **Rate** $\boldsymbol{R}$.

Aufzinsungsfaktor: $q = 101{,}3\,\% = 1{,}013$

Gesamtwert zum Zeitpunkt 8:

$$R \cdot q + R \cdot q^2 + \cdots + R \cdot q^8 = R \cdot q \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = R \cdot 8{,}482\ldots$$

Gleichung lösen:

$$R \cdot 8{,}482\ldots = 5000 \iff R = \frac{5000}{8{,}482\ldots} = 589{,}45\ldots\ €$$

Jährlicher Zinssatz – Monatlicher Zinssatz

Zwei (großzügige) Banken bieten dir folgende Konditionen für ein Sparbuch an:
Bank A: effektiver Zinssatz 24 % p. a.
Bank B: effektiver Zinssatz 2 % p. m. (pro Monat)

a) Für welche Bank würdest du dich entscheiden?
Berechne den entsprechenden effektiven jährlichen Zinssatz bei Bank B.

$$1{,}02^{12} = 1{,}2682... = 126{,}82...\,\% \implies \text{jährlicher Zinssatz bei Bank B: } 26{,}82...\,\%$$

Bei Bank B erhält man also mehr Zinsen pro Jahr. („Zinseszinsen“)

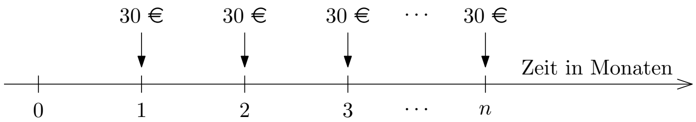
b) Welcher effektive monatliche Zinssatz entspricht dem Jahreszinssatz von Bank A?

$$q^{12} = 1{,}24 \implies q = \sqrt[12]{1{,}24} = 1{,}018\,08... = 101{,}808...\%$$

Monatlicher effektiver Zinssatz 1,808... % $\longleftrightarrow$ Jährlicher effektiver Zinssatz 24 %

Nachschüssige Rente – Laufzeit

Du eröffnest einen Sparplan mit dem Zinssatz 1,4 % p. a. vor Abzug der KESt und folgender Zeitachse:



1) Berechne den effektiven monatlichen Aufzinsungsfaktor q.

2) Nach der wievielten Einzahlung hast du erstmals mehr als 3000 € angespart?

1) Effektiver jährlicher Zinssatz: $1{,}4\,\% \cdot 0{,}75 = 1{,}05\,\%$
Effektiver jährlicher Aufzinsungsfaktor: $101{,}05\,\% = 1{,}0105$
Effektiver monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q = \sqrt[12]{1{,}0105} = 1{,}000\,870...$

2) Gesamtwert nach der n-ten Einzahlung:

$$\underbrace{30 + 30 \cdot q + 30 \cdot q^2 + \dots + 30 \cdot q^{n-1}}_{n \text{ Einzahlungen}} = 30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Gleichung lösen:

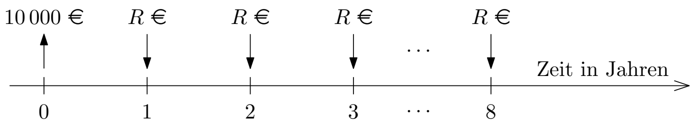
$$30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3000 \iff \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \iff q^n = \underbrace{100 \cdot (q - 1) + 1}_{=1{,}087...} \iff$$

$$\iff n = \frac{\lg(1{,}087...)}{\lg(q)} = 95{,}92...\text{ Monate}$$

Nach der 96. Einzahlung sind erstmals mehr als 3000 € angespart.

Zahlungsplan

Du nimmst einen Kredit über 10 000 € auf, der jährlich effektiv mit 3 % verzinst wird.
Du möchtest jährlich eine fixen Rate R € so bezahlen, dass der Kredit nach 8 Jahren abbezahlt ist:



Die jährliche Rate $\frac{10\,000\text{ €}}{8} = 1250$ € ist *nicht* ausreichend. Warum?

$R = 1250$ € wäre die richtige Rate ohne Verzinsung.
Aufgrund der Zinsen ist eine größere Rate notwendig.

Wir erstellen eine Tabellenkalkulation mit einem Zahlungsplan in Abhängigkeit von der Rate R:

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1250
3	1	9050			
4	2	8071.5			
5	3	7063.65			
6	4	6025.55			
7	5	4956.32			
8	6	3855.01			
9	7	2720.66			
10	8	1552.28			

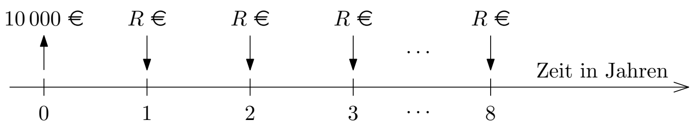
	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1424.56
3	1	8875.44			
4	2	7717.14			
5	3	6524.1			
6	4	5295.26			
7	5	4029.56			
8	6	2725.88			
9	7	1383.1			
10	8	0.03			

Durch Probieren finden wir die passende Rate $R = 1424{,}56\ldots$ €. Aber wie kann man R berechnen?

Äquivalenzprinzip

Ich borge dir R € und du borgst mir R € mit dem gleichen jährlichen Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}03$.
Dann sind wir uns *insgesamt* zu keinem Zeitpunkt etwas schuldig. Wir können uns also die Schulden erlassen.

Mit dem gleichen Prinzip können wir die Rate R in der folgenden Zeitachse berechnen:



Zum Zeitpunkt 1 zahlst du R € an die Bank zurück. Deine Schulden werden damit um R € reduziert. Stattdessen könnte die Bank deine Schulden auch *nicht* reduzieren und dir dafür ein Sparbuch mit R € Kapital und gleichem Zinssatz geben. Damit würdet ihr euch gegenseitig ein gleichartiges Sparbuch geben.

Der Kredit ist nach 8 Jahren abbezahlt, wenn zu diesem Zeitpunkt der Gesamtwert deiner 8 Sparbücher gleich groß ist wie der Wert des (nicht reduzierten) Kredits. Dann könnt ihr euch nämlich die Schulden erlassen.

Für den Gesamtwert der 8 Einzahlungen gilt zum Zeitpunkt 8:

$$R + R \cdot q + R \cdot q^2 + \cdots + R \cdot q^7 = R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1}$$

Für den Gesamtwert der einen Auszahlung gilt zum Zeitpunkt 8:

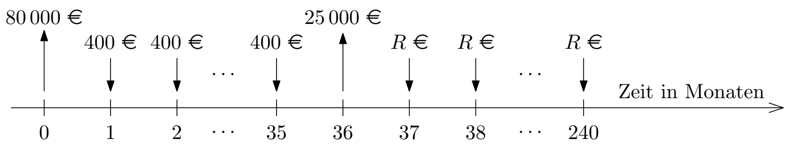
$$10\,000 \cdot q^8 = 12\,667{,}70\ldots\text{ €}$$

Berechne diese Rate R.

$$R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 12\,667{,}70\ldots \iff R = \frac{12\,667{,}70\ldots \cdot (q-1)}{q^8 - 1} = 1424{,}56\ldots\text{ €}$$

Ratenanpassung

Für einen Wohnungskauf nimmst du einen Kredit in Höhe von 80 000 € auf.
Der effektive Zinssatz beträgt 3,75 % p. a. und bleibt für die gesamte Laufzeit fix.
Für den Kauf eines Autos nimmst du nach 3 Jahren einen weiteren Kredit in Höhe von 25 000 € mit gleichem Zinssatz auf. Der Zahlungsverlauf ist auf der folgenden Zeitachse dargestellt:



1) Berechne die eingezeichnete Rate R so, dass der Kredit nach genau 20 Jahren abbezahlt ist.

2) Wie viel Euro zahlst du dabei insgesamt an die Bank zurück?

1) Jährlicher Aufzinsungsfaktor: $103{,}75\% = 1{,}0375$
Monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q = \sqrt[12]{1{,}0375} = 1{,}003\,072...$

Gesamtwert der beiden Auszahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$80\,000 \cdot q^{240} + 25\,000 \cdot q^{204} = 213\,797{,}44...\ €$$

Gesamtwert der ersten 35 Einzahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$400 \cdot q^{239} + 400 \cdot q^{238} + \dots + 400 \cdot q^{205} = 400 \cdot q^{205} \cdot \frac{q^{35}-1}{q-1} = 27\,676{,}83...\ €$$

Gesamtwert der $240 - 36 = 204$ Ratenzahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$R \cdot q^{203} + R \cdot q^{202} + \dots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{q^{204}-1}{q-1}$$

Gleichung lösen:

$$27\,676{,}83... + R \cdot \frac{q^{204}-1}{q-1} = 213\,797{,}44...$$

$$R = 186\,120{,}60... \cdot \frac{q-1}{q^{204}-1} \approx 657{,}46\ €$$

2) $400 \cdot 35 + R \cdot 204 \approx 148\,121{,}17$ €

Barwert

Du darfst wählen:

- Entweder du bekommst heute in 5 Jahren garantiert eine Zahlung von $E = 4200$ €.
- Oder du bekommst heute einen Betrag B, den du über 5 Jahre mit dem fixen effektiven Zinssatz 2 % p. a. veranlagen kannst.

Ab welchem Betrag B solltest du dich jedenfalls für die zweite Option entscheiden?

$$E = B \cdot 1{,}02^5 \iff B = \frac{E}{1{,}02^5} = 3804{,}06\ldots \text{ €}$$

Dem **Endwert E** entspricht der **Barwert B**.
Dem **Aufzinsungsfaktor q** entspricht der **Abzinsungsfaktor $\frac{1}{q}$**.

Ewige Rente

Bei einer privaten Pensionsvorsorge hast du über Jahrzehnte ein Kapital K angespart, das mit dem fixen effektiven Zinssatz $i = 0{,}7$ % p. a. verzinst wird.

Du lässt dir heute und danach jährlich den gleichen Betrag $U = 600$ € auszahlen.
Wenn vor jeder Auszahlung der gleiche Betrag K am Konto ist, spricht man von einer **ewigen Rente**.

1) Wie groß muss K sein, damit du tatsächlich die ewige jährliche Rente $U = 600$ € erhältst?

2) Du zahlst über 40 Jahre insgesamt $40 \cdot 12 = 480$ Mal die monatliche Rate R ein.
Wie groß muss R sein, damit du mit Einzahlung der 480. Rate dieses Kapital K angespart hast?

1) Jährlicher Aufzinsungsfaktor: $q = 100{,}7\% = 1{,}007$

Kontostand unmittelbar vor der zweiten Auszahlung: $(K - U) \cdot q$

Gleichung lösen:

$$(K - U) \cdot q = K \iff K \cdot q - U \cdot q = K \iff$$
$$\iff K \cdot q - K = U \iff K = \frac{U}{q - 1} = 85\,714{,}28\ldots \text{ €}$$

2) Monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q_M = \sqrt[12]{q} = 1{,}000\,581\ldots$

Gesamtwert der Einzahlungen nach Einzahlung der 480. Rate:

$$R \cdot q_M^{479} + R \cdot q_M^{478} + \cdots + R \cdot q_M + R = R \cdot \frac{q_M^{480} - 1}{q_M - 1} = R \cdot 553{,}49\ldots$$

Gleichung lösen:

$$R \cdot 553{,}49\ldots = K \iff R = \frac{K}{553{,}49\ldots} = 154{,}86\ldots \text{ €}$$