Zweiseitiger Zufallsstreubereich für einen Einzelwert

Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 177{,}8\,\text{cm}$ und Standardabweichung $\sigma = 6{,}1\,\text{cm}$.

Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstreubereich** für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns.

Das heißt: Ein 42-jähriger Mann wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

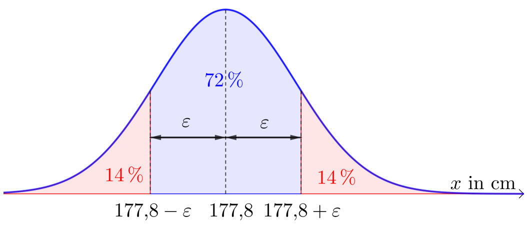
In welchem um μ symmetrischen Intervall ist seine Körpergröße mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Berechnung ohne Formel

Die Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariable mit $\mu = 177{,}8$ und $\sigma = 6{,}1$ ist dargestellt.

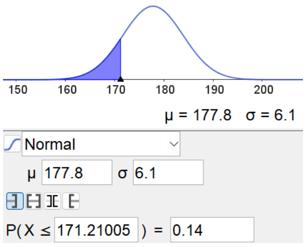
Gesucht ist jenes um μ symmetrische Intervall, für das gilt:

$$P(177{,}8 - \varepsilon \leq X \leq 177{,}8 + \varepsilon) = 0{,}72$$



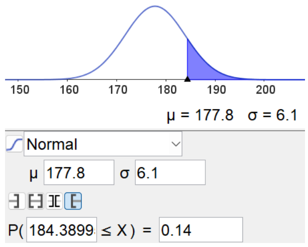
Beschrifte rechts die blaue Fläche und die beiden roten Flächen jeweils mit ihrer zugehörigen Wahrscheinlichkeit.

Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:



$$P(X \leq 171{,}2...) = 14\,\%$$

$$P(X \geq 184{,}3...) = 14\,\%$$



72 %-Zufallsstreubereich für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns: $[171{,}2...\,\text{cm}; 184{,}3...\,\text{cm}]$

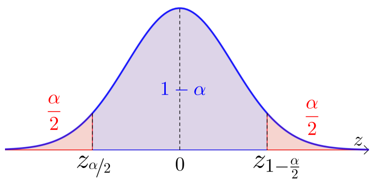
Zweiseitiger Zufallsstreubereich für einen Einzelwert

Die Zufallsvariable Z ist standardnormalverteilt.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist eine Zahl mit $0 < \alpha < 1$.

Das ***p*-Quantil** ist jene Zahl $\boldsymbol{z_p}$ mit $P(Z \leq z_p) = p$.

Rechts sind das $\frac{\alpha}{2}$-Quantil und das $(1 - \frac{\alpha}{2})$-Quantil dargestellt.



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.

Dann gilt für den **zweiseitigen $(1 - \alpha)$-Zufallsstreubereich** für einen Einzelwert von X:

$$\left[\boldsymbol{\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \;;\; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}\right]$$

Diese Formel folgt aus der Standardisierung $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ bzw. $X = \mu + Z \cdot \sigma$.
Die Stelle $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ von Z entspricht also der Stelle $\mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$ von X.
Symmetrisch zu μ liegt die linke Grenze $\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$.

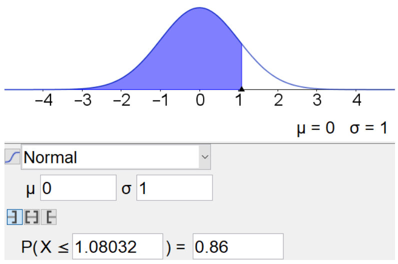
Berechnung mit Formel

Beim zweiseitigen 72 %-Zufallsstreubereich gilt $1 - \alpha = 0{,}72$

und damit $\alpha = 0{,}28$ bzw. $1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}86$.

Das 86 %-Quantil der Standardnormalverteilung ist jene Zahl $z_{0{,}86}$, die $P(Z \leq z_{0{,}86}) = 0{,}86$ erfüllt.

Für dieses Quantil gilt: $z_{0{,}86} = 1{,}0803...$



Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstreubereich von X gilt also:

$$[\mu - z_{0{,}86} \cdot \sigma \;;\; \mu + z_{0{,}86} \cdot \sigma] = [171{,}2...\,\text{cm}; 184{,}3...\,\text{cm}]$$

Zweiseitiger Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert

Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit $\mu = 177{,}8\,\text{cm}$ und $\sigma = 6{,}1\,\text{cm}$.
Eine Stichprobe besteht aus $n = 25$ nach dem Zufallsprinzip ausgewählten 42-jährigen Männern.
Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstreubereich** für den Stichprobenmittelwert $\bar{X}$.
Das heißt: In welchem um μ symmetrischen Intervall ist $\bar{X}$ mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

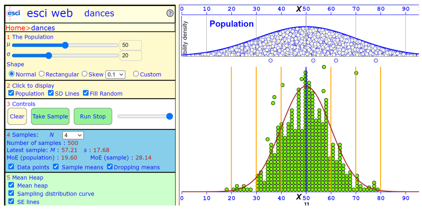
Verteilung des Stichprobenmittelwerts

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$. Dann ist auch das **arithmetische Mittel $\bar{X}$** mit

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu_{\bar{X}} = \mu$ und $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

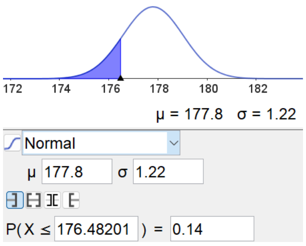
Je größer die Stichprobengröße n ist, desto kleiner ist also die Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts.



Quelle: esci.thenewstatistics.com

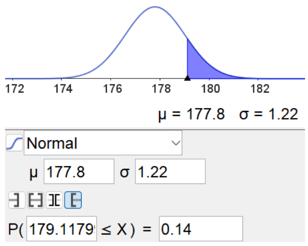
Berechnung ohne Formel

Der Stichprobenmittelwert $\bar{X}$ von $n = 25$ Körpergrößen ist also normalverteilt mit
Erwartungswert $\mu_{\bar{X}} = 177{,}8\,\text{cm}$ und Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{6{,}1}{\sqrt{25}} = 1{,}22\,\text{cm}$.
Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:



$$P(\bar{X} \leq 176{,}4...) = 14\,\%$$

$$P(\bar{X} \geq 179{,}1...) = 14\,\%$$



72 %-Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert $\bar{X}$: $[176{,}4...\,\text{cm}; 179{,}1...\,\text{cm}]$

Zweiseitiger Zufallsstreubereich für den Stichprobenmittelwert

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.
Dann gilt für den **zweiseitigen $(1-\alpha)$-Zufallsstreubereich** für den Stichprobenmittelwert $\bar{X}$:

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\ \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Das ist die gleiche Formel wie auf S.1 nur mit Standardabweichung $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

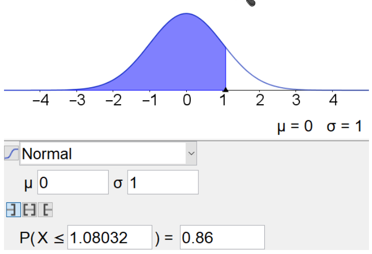
Dabei ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung mit $0 < \alpha < 1$.

Berechnung mit Formel

Wie zuvor ermitteln wir das 86 %-Quantil: $z_{0,86} = 1{,}0803...$

Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstreubereich von $\bar{X}$ gilt also:

$$\left[\mu - z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\ \mu + z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [176{,}4...\,\text{cm}; 179{,}1...\,\text{cm}]$$



Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ

Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *bekannter* Standardabweichung $\sigma = 6{,}1$ cm. Wir sollen den Erwartungswert μ schätzen.

Dazu wählen wir 42-jährige Männer nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

187,1	169,5	179,4	164,9	168,9	182,2	178,4	180,7	184,3	183,4

Auf Basis dieser Stichprobe ist die beste Schätzung für μ das arithmetische Mittel $\bar{x} = 177{,}88$ cm.

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert μ.

Das heißt: Welches symmetrisch um $\bar{x}$ liegende Intervall enthält μ mit der Wahrscheinlichkeit 95 %?

Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *bekannter* Standardabweichung $\sigma > 0$.

Eine Stichprobe der Größe n hat den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.

Dann gilt für das **zweiseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall** für μ:

$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\, ;\, \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

Das ist die gleiche Formel wie auf S.2 nur mit $\bar{x}$ statt μ.

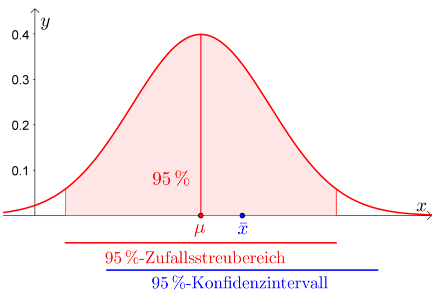
Dabei ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Standardnormalverteilung mit $0 < \alpha < 1$.

Bei gegebenem α, σ und n haben der Zufallsstreubereich und das Konfidenzintervall die gleiche Breite:

$$\text{Intervallbreite} = \left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Zufallsstreubereich – Konfidenzintervall

Der 95 %-Zufallsstreubereich um μ und das 95 %-Konfidenzintervall um $\bar{x}$ sind gleich breit.



Ob das berechnete Konfidenzintervall den Wert μ enthält, hängt vom Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ ab:

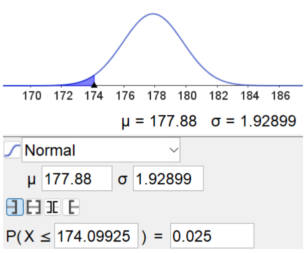
- Wenn $\bar{x}$ im Zufallsstreubereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ.
- Wenn $\bar{x}$ *nicht* im Zufallsstreubereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ *nicht*.

Der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ liegt mit der Wahrscheinlichkeit 95 % im 95 %-Zufallsstreubereich.

Also enthält das 95 %-Konfidenzintervall den Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit 95 %.

Berechnung ohne Formel

Bei *bekannter* Standardabweichung berechnen wir das Konfidenzintervall wie den Zufallsstreubereich:

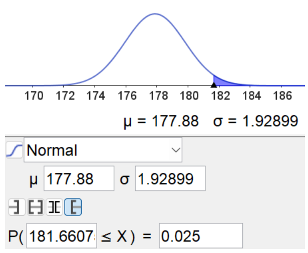


Nur verwenden wir $\bar{x}$ statt μ:

$$\bar{x} = 177{,}88\,\text{cm} \qquad \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}928\ldots\,\text{cm}$$

95 %-Konfidenzintervall für μ:

$$[174{,}09\ldots\,\text{cm}; 181{,}66\ldots\,\text{cm}]$$



Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ

Die Körpergröße von 42-jährigen Frauen ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *unbekannter* Standardabweichung σ. Wir sollen den Erwartungswert μ schätzen.

Dazu wählen wir 42-jährige Frauen nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

169,9	172,0	172,1	171,1	165,8	165,9	153,1	171,5	168,6	167,2

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert μ.

Unter diesen Voraussetzungen müssen wir sowohl μ als auch σ aus der Stichprobe schätzen.

Erwartungstreue Schätzer

Gegeben ist eine Stichprobe mit n Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Die bestmögliche Schätzung für μ ist das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Die bestmögliche Schätzung für σ ist die Stichproben-Standardabweichung s_{n-1}:

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *unbekannter* Standardabweichung $\sigma > 0$.

Eine Stichprobe der Größe n hat den Mittelwert $\bar{x}$ und die Stichproben-Standardabweichung s_{n-1}.

Dann gilt für das **zweiseitige $(1-\alpha)$-Konfidenzintervall** für μ:

$$\left[\boldsymbol{\bar{x} - t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}}\right] \quad \text{mit } f = n-1$$

Dabei ist $t_{f;1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Student-t-Verteilung mit f Freiheitsgraden mit $0 < \alpha < 1$.

Bei unbekanntem σ hängt die Breite des Konfidenzintervalls von s_{n-1} und damit (auch bei fester Größe n) von der Stichprobe ab.

Berechnung mit Formel

1) Liste mit Messwerten in der Tabellen-Ansicht erzeugen

Rechtsklick ⇝ Erzeugen ⇝ Liste

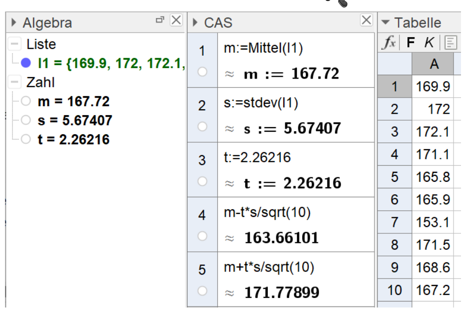
2) **Mittel**(<Liste von Zahlen>)

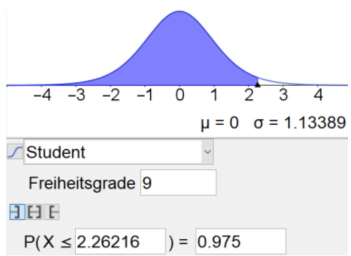
In manchen GeoGebra-Versionen: **mean** oder **Mittelwert**

3) **stdev**(<Liste von Rohdaten>) „standard deviation“

In manchen GeoGebra-Versionen: **StichprobenStandardabweichung**

4) $(1-\frac{\alpha}{2})$-Quantil der Student-t-Verteilung mit $n-1$ Freiheitsgraden ermitteln





95 %-Konfidenzintervall für μ:

$$\left[\bar{x} - t_{9;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\ ;\ \bar{x} + t_{9;0{,}975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}}\right] = [163{,}6\ldots\,\text{cm};\ 171{,}7\ldots\,\text{cm}]$$

Alternativer Lösungsweg:

1) Daten in Tabellen-Ansicht eingeben **2)** Daten markieren und Analyse einer Variablen auswählen: → Analyse

3) Statistik anzeigen: $\sum x$ **4)** Dropdown-Menü: T Schätzung eines Mittelwerts **5)** Konfidenzniveau 95 % eingeben