

Zweiseitiger Zufallsstrebereich für einen Einzelwert



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist **normalverteilt** mit Erwartungswert  $\mu = 177,8$  cm und Standardabweichung  $\sigma = 6,1$  cm.

Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich** für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns. Das heißt: Ein 42-jähriger Mann wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

In welchem um  $\mu$  symmetrischen Intervall ist seine Körpergröße mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Berechnung ohne Formel

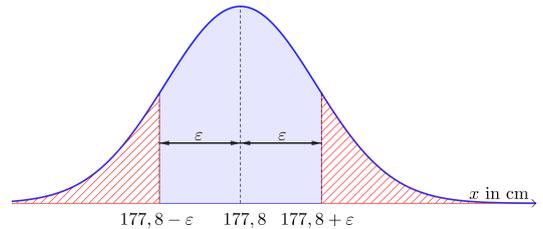


Die Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariable mit  $\mu = 177,8$  und  $\sigma = 6,1$  ist dargestellt.

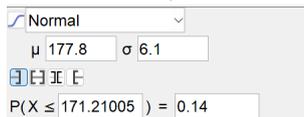
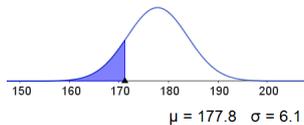
Gesucht ist jenes um  $\mu$  symmetrische Intervall, für das gilt:

$$P(177,8 - \varepsilon \leq X \leq 177,8 + \varepsilon) = 0,72$$

Beschrifte rechts die blaue Fläche und die beiden roten Flächen jeweils mit ihrer zugehörigen Wahrscheinlichkeit.

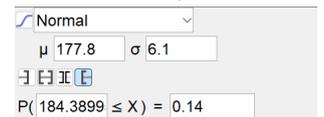
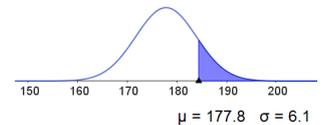


Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:



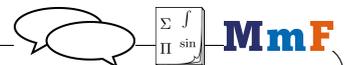
$$P(X \leq \boxed{\phantom{000}}) = 14\%$$

$$P(X \geq \boxed{\phantom{000}}) = 14\%$$



72 %-Zufallsstrebereich für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns: [  cm;  cm ]

Zweiseitiger Zufallsstrebereich für einen Einzelwert

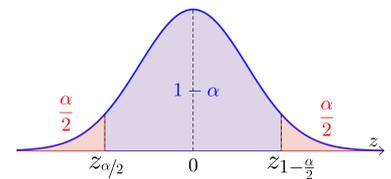


Die Zufallsvariable  $Z$  ist **standardnormalverteilt**.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit  $\alpha$  ist eine Zahl mit  $0 < \alpha < 1$ .

Das **p-Quantil** ist jene Zahl  $z_p$  mit  $P(Z \leq z_p) = p$ .

Rechts sind das  $\frac{\alpha}{2}$ -Quantil und das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil dargestellt.



Die Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma > 0$ .

Dann gilt für den **zweiseitigen  $(1 - \alpha)$ -Zufallsstrebereich** für einen Einzelwert von  $X$ :

$$\left[ \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma ; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Diese Formel folgt aus der **Standardisierung**  $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$  bzw.  $X = \mu + Z \cdot \sigma$ . Die Stelle  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  von  $Z$  entspricht also der Stelle  $\mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$  von  $X$ . Symmetrisch zu  $\mu$  liegt die linke Grenze  $\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$ .

Berechnung mit Formel



Beim zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich gilt  $1 - \alpha = 0,72$

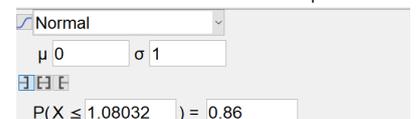
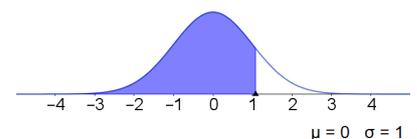
und damit  $\alpha = \boxed{\phantom{000}}$  bzw.  $1 - \frac{\alpha}{2} = \boxed{\phantom{000}}$ .

Das 86 %-Quantil der Standardnormalverteilung ist jene Zahl  $z_{0,86}$ , die  $P(Z \leq z_{0,86}) = 0,86$  erfüllt.

Für dieses Quantil gilt:  $z_{0,86} = \boxed{\phantom{000}}$

Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich von  $X$  gilt also:

$$[\mu - z_{0,86} \cdot \sigma ; \mu + z_{0,86} \cdot \sigma] = [ \boxed{\phantom{000}} \text{ cm}; \boxed{\phantom{000}} \text{ cm} ]$$



Zweiseitiger Zufallsstreuereich für den Stichprobenmittelwert



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit  $\mu = 177,8$  cm und  $\sigma = 6,1$  cm. Eine Stichprobe besteht aus  $n = 25$  nach dem Zufallsprinzip ausgewählten 42-jährigen Männern. Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstreuereich** für den Stichprobenmittelwert  $\bar{X}$ . Das heißt: In welchem um  $\mu$  symmetrischen Intervall ist  $\bar{X}$  mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Verteilung des Stichprobenmittelwerts

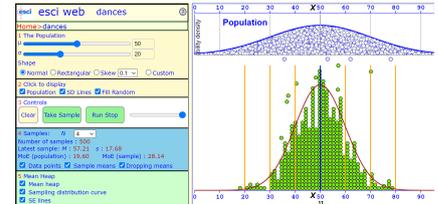


Die Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma > 0$ . Dann ist auch das **arithmetische Mittel  $\bar{X}$**  mit

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit  $\mu_{\bar{X}} = \mu$  und  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ .

Je größer die Stichprobengröße  $n$  ist, desto kleiner ist also die Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts.



Quelle: [esci.thenewstatistics.com](http://esci.thenewstatistics.com)

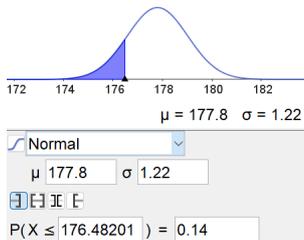
Berechnung ohne Formel



Der Stichprobenmittelwert  $\bar{X}$  von  $n = 25$  Körpergrößen ist also normalverteilt mit

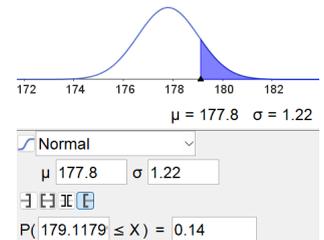
Erwartungswert  $\mu_{\bar{X}} = \boxed{\phantom{000}}$  und Standardabweichung  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\phantom{000}}{\phantom{000}} = \boxed{\phantom{000}}$ .

Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieinsatz:



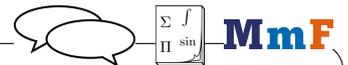
$$P(\bar{X} \leq \boxed{\phantom{000}}) = 14\%$$

$$P(\bar{X} \geq \boxed{\phantom{000}}) = 14\%$$



72 %-Zufallsstreuereich für den Stichprobenmittelwert  $\bar{X}$ :  $[\boxed{\phantom{000}} \text{ cm}; \boxed{\phantom{000}} \text{ cm}]$

Zweiseitiger Zufallsstreuereich für den Stichprobenmittelwert



Die Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu$  und Standardabweichung  $\sigma > 0$ .

Dann gilt für den **zweiseitigen  $(1 - \alpha)$ -Zufallsstreuereich** für den Stichprobenmittelwert  $\bar{X}$ :

$$\left[ \mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{Das ist die gleiche Formel wie auf S.1 nur mit Standardabweichung } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Dabei ist  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung mit  $0 < \alpha < 1$ .

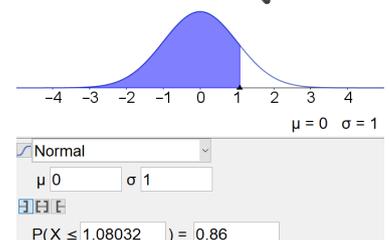
Berechnung mit Formel



Wie zuvor ermitteln wir das 86 %-Quantil:  $z_{0,86} = \boxed{\phantom{000}}$

Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstreuereich von  $\bar{X}$  gilt also:

$$\left[ \mu - z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [\boxed{\phantom{000}} \text{ cm}; \boxed{\phantom{000}} \text{ cm}]$$



Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei bekanntem  $\sigma$



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert  $\mu$  und *bekannter* Standardabweichung  $\sigma = 6,1$  cm. Wir sollen den Erwartungswert  $\mu$  schätzen.

Dazu wählen wir 42-jährige Männer nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

187,1	169,5	179,4	164,9	168,9	182,2	178,4	180,7	184,3	183,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Auf Basis dieser Stichprobe ist die beste Schätzung für  $\mu$  das **arithmetische Mittel**  $\bar{x} =$

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert  $\mu$ .

Das heißt: Welches symmetrisch um  $\bar{x}$  liegende Intervall enthält  $\mu$  mit der Wahrscheinlichkeit 95 %?

Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei bekanntem  $\sigma$



Die Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert  $\mu$  und *bekannter* Standardabweichung  $\sigma > 0$ .

Eine Stichprobe der Größe  $n$  hat den Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$ .

Dann gilt für das **zweiseitige  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall** für  $\mu$ :

$$\left[ \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Das ist die gleiche Formel wie auf S.2 nur mit  $\bar{x}$  statt  $\mu$ .

Dabei ist  $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung mit  $0 < \alpha < 1$ .

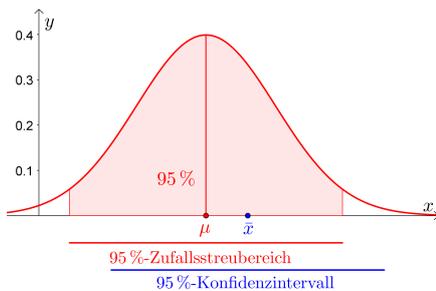
Bei gegebenem  $\alpha$ ,  $\sigma$  und  $n$  haben der Zufallsstrebereich und das Konfidenzintervall die gleiche Breite:

Intervallbreite =  $\left( \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left( \bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$

Zufallsstrebereich – Konfidenzintervall



Der **95 %-Zufallsstrebereich** um  $\mu$  und das **95 %-Konfidenzintervall** um  $\bar{x}$  sind gleich breit.



Ob das berechnete Konfidenzintervall den Wert  $\mu$  enthält, hängt vom Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  ab:

- Wenn  $\bar{x}$  im Zufallsstrebereich von  $\mu$  liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert  $\mu$ .
- Wenn  $\bar{x}$  *nicht* im Zufallsstrebereich von  $\mu$  liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert  $\mu$  *nicht*.

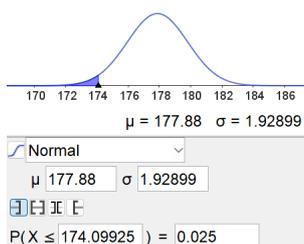
Der Stichprobenmittelwert  $\bar{x}$  liegt mit der Wahrscheinlichkeit 95 % im 95 %-Zufallsstrebereich.

Also enthält das 95 %-Konfidenzintervall den Erwartungswert  $\mu$  mit der Wahrscheinlichkeit 95 %.

Berechnung ohne Formel



Bei *bekannter* Standardabweichung berechnen wir das Konfidenzintervall wie den Zufallsstrebereich:

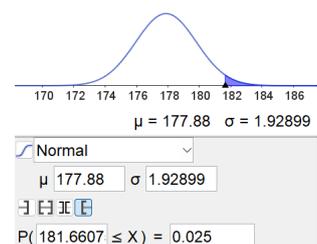


Nur verwenden wir  $\bar{x}$  statt  $\mu$ :

$\bar{x} = 177,88$  cm  $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$

95 %-Konfidenzintervall für  $\mu$ :

[  cm;  cm ]



Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei unbekanntem  $\sigma$



Die Körpergröße von 42-jährigen Frauen ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert  $\mu$  und *unbekannter* Standardabweichung  $\sigma$ . Wir sollen den Erwartungswert  $\mu$  schätzen.

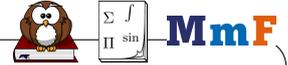
Dazu wählen wir 42-jährige Frauen nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

169,9	172,0	172,1	171,1	165,8	165,9	153,1	171,5	168,6	167,2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert  $\mu$ .

Unter diesen Voraussetzungen müssen wir sowohl  $\mu$  als auch  $\sigma$  aus der Stichprobe schätzen.

Erwartungstreue Schätzer



Gegeben ist eine Stichprobe mit  $n$  Werten  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

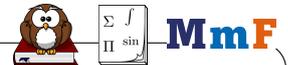
Die bestmögliche Schätzung für  $\mu$  ist das arithmetische Mittel  $\bar{x}$  der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Die bestmögliche Schätzung für  $\sigma$  ist die Stichproben-Standardabweichung  $s_{n-1}$ :

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für  $\mu$  bei unbekanntem  $\sigma$



Die Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert  $\mu$  und *unbekannter* Standardabweichung  $\sigma > 0$ .

Eine Stichprobe der Größe  $n$  hat den Mittelwert  $\bar{x}$  und die Stichproben-Standardabweichung  $s_{n-1}$ .

Dann gilt für das **zweiseitige  $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall** für  $\mu$ :

$$\left[ \bar{x} - t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] \text{ mit } f = n - 1$$

Dabei ist  $t_{f;1-\frac{\alpha}{2}}$  das  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student- $t$ -Verteilung mit  $f$  Freiheitsgraden mit  $0 < \alpha < 1$ .

Bei unbekanntem  $\sigma$  hängt die **Breite des Konfidenzintervalls** von  $s_{n-1}$  und damit (auch bei fester Größe  $n$ ) von der Stichprobe ab.

Berechnung mit Formel



1) Liste mit Messwerten in der Tabellen-Ansicht erzeugen  
Rechtsklick  $\rightsquigarrow$  Erzeugen  $\rightsquigarrow$  Liste

2) Mittel(<Liste von Zahlen>)  
In manchen GeoGebra-Versionen: **mean** oder **Mittelwert**

3) stdev(<Liste von Rohdaten>) „standard deviation“  
In manchen GeoGebra-Versionen: **StichprobenStandardabweichung**

4)  $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student- $t$ -Verteilung mit  $n - 1$  Freiheitsgraden ermitteln

95 %-Konfidenzintervall für  $\mu$ :

$$\left[ \bar{x} - t_{9;0,975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{9;0,975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = [ \quad ] \text{ cm}; [ \quad ] \text{ cm}$$

Alternativer Lösungsweg:

- 1) Daten in Tabellen-Ansicht eingeben
- 2) Daten markieren und Analyse einer Variablen auswählen:  $\rightarrow$  Analyse
- 3) Statistik anzeigen:  $\sum x$
- 4) Dropdown-Menü:
- 5) Konfidenzniveau 95 % eingeben

Algebra	CAS	Tabelle
Liste	1 m:=Mittel(I1)	f: F K
Zahl	≈ m := 167.72	A
m = 167.72	2 s:=stdev(I1)	1 169.9
s = 5.67407	≈ s := 5.67407	2 172
t = 2.26216	3 t:=2.26216	3 172.1
	≈ t := 2.26216	4 171.1
	4 m-t*s/sqrt(10)	5 165.8
	≈ 163.66101	6 165.9
	5 m+t*s/sqrt(10)	7 153.1
	≈ 171.77899	8 171.5
		9 168.6
		10 167.2

