

Zweiseitiger Zufallsstrebereich für einen Einzelwert



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist **normalverteilt** mit Erwartungswert $\mu = 177,8$ cm und Standardabweichung $\sigma = 6,1$ cm.

Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich** für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns. Das heißt: Ein 42-jähriger Mann wird nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

In welchem um μ symmetrischen Intervall ist seine Körpergröße mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Berechnung ohne Formel

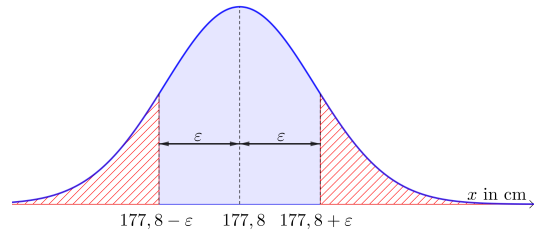


Die Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsvariable mit $\mu = 177,8$ und $\sigma = 6,1$ ist dargestellt.

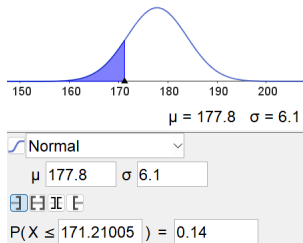
Gesucht ist jenes um μ symmetrische Intervall, für das gilt:

$$P(177,8 - \varepsilon \leq X \leq 177,8 + \varepsilon) = 0,72$$

Beschrifte rechts die blaue Fläche und die beiden roten Flächen jeweils mit ihrer zugehörigen Wahrscheinlichkeit.

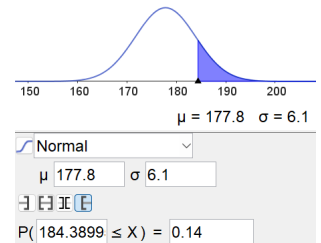


Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieeinsatz:



$$P(X \leq \boxed{}) = 14\%$$

$$P(X \geq \boxed{}) = 14\%$$



72 %-Zufallsstrebereich für die Körpergröße eines 42-jährigen Manns: [cm; cm]

Zweiseitiger Zufallsstrebereich für einen Einzelwert

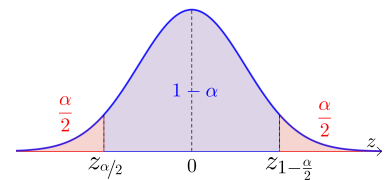


Die Zufallsvariable Z ist **standardnormalverteilt**.

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist eine Zahl mit $0 < \alpha < 1$.

Das **p-Quantil** ist jene Zahl z_p mit $P(Z \leq z_p) = p$.

Rechts sind das $\frac{\alpha}{2}$ -Quantil und das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil dargestellt.



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.

Dann gilt für den **zweiseitigen $(1 - \alpha)$ -Zufallsstrebereich** für einen Einzelwert von X :

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma ; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma \right]$$

Diese Formel folgt aus der **Standardisierung** $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ bzw. $X = \mu + Z \cdot \sigma$. Die Stelle $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ von Z entspricht also der Stelle $\mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$ von X . Symmetrisch zu μ liegt die linke Grenze $\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma$.

Berechnung mit Formel



Beim zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich gilt $1 - \alpha = 0,72$

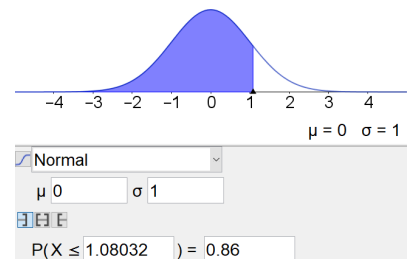
und damit $\alpha = \boxed{}$ bzw. $1 - \frac{\alpha}{2} = \boxed{}$.

Das 86 %-Quantil der Standardnormalverteilung ist jene Zahl $z_{0,86}$, die $P(Z \leq z_{0,86}) = 0,86$ erfüllt.

Für dieses Quantil gilt: $z_{0,86} = \boxed{}$

Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstrebereich von X gilt also:

$$\left[\mu - z_{0,86} \cdot \sigma ; \mu + z_{0,86} \cdot \sigma \right] = \left[\boxed{} \text{ cm}; \boxed{} \text{ cm} \right]$$



Zweiseitiger Zufallsstreuungsbereich für den Stichprobenmittelwert



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit $\mu = 177,8$ cm und $\sigma = 6,1$ cm. Eine Stichprobe besteht aus $n = 25$ nach dem Zufallsprinzip ausgewählten 42-jährigen Männern. Berechne den **zweiseitigen 72 %-Zufallsstreuungsbereich** für den Stichprobenmittelwert \bar{X} . Das heißt: In welchem um μ symmetrischen Intervall ist \bar{X} mit der Wahrscheinlichkeit 72 %?

Verteilung des Stichprobenmittelwerts

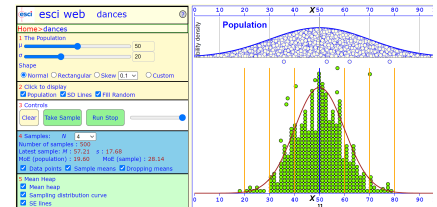


Die Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n sind unabhängig und normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$. Dann ist auch das **arithmetische Mittel \bar{X}** mit

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu_{\bar{X}} = \mu$ und $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Je größer die Stichprobengröße n ist, desto kleiner ist also die Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts.



Quelle: esci.thenewstatistics.com

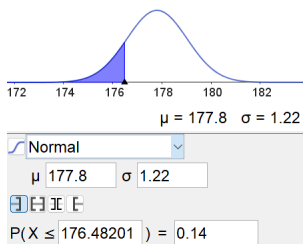
Berechnung ohne Formel



Der Stichprobenmittelwert \bar{X} von $n = 25$ Körpergrößen ist also normalverteilt mit

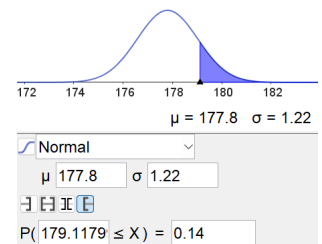
Erwartungswert $\mu_{\bar{X}} = \boxed{}$ und Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}} = \frac{}{} = \boxed{}$.

Ermittle die beiden Intervallgrenzen mit Technologieinsatz:



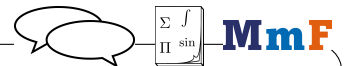
$$P(\bar{X} \leq \boxed{}) = 14\%$$

$$P(\bar{X} \geq \boxed{}) = 14\%$$



72 %-Zufallsstreuungsbereich für den Stichprobenmittelwert \bar{X} : $[\boxed{} \text{ cm}; \boxed{} \text{ cm}]$

Zweiseitiger Zufallsstreuungsbereich für den Stichprobenmittelwert



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.

Dann gilt für den **zweiseitigen $(1 - \alpha)$ -Zufallsstreuungsbereich** für den Stichprobenmittelwert \bar{X} :

$$\left[\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad \text{Das ist die gleiche Formel wie auf S.1 nur mit Standardabweichung } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Dabei ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung mit $0 < \alpha < 1$.

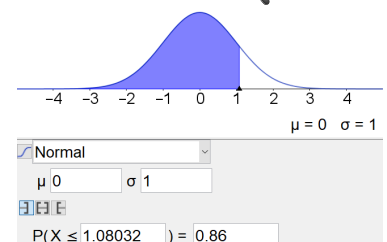
Berechnung mit Formel



Wie zuvor ermitteln wir das 86 %-Quantil: $z_{0,86} = \boxed{}$

Für den zweiseitigen 72 %-Zufallsstreuungsbereich von \bar{X} gilt also:

$$\left[\mu - z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \mu + z_{0,86} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = [\boxed{} \text{ cm}; \boxed{} \text{ cm}]$$



Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ



Die Körpergröße von 42-jährigen Männern ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *bekannter* Standardabweichung $\sigma = 6,1$ cm. Wir sollen den Erwartungswert μ schätzen.

Dazu wählen wir 42-jährige Männer nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

187,1	169,5	179,4	164,9	168,9	182,2	178,4	180,7	184,3	183,4
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Auf Basis dieser Stichprobe ist die beste Schätzung für μ das **arithmetische Mittel** $\bar{x} =$

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert μ .

Das heißt: Welches symmetrisch um \bar{x} liegende Intervall enthält μ mit der Wahrscheinlichkeit 95 %?

Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei bekanntem σ



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *bekannter* Standardabweichung $\sigma > 0$.

Eine Stichprobe der Größe n hat den Stichprobenmittelwert \bar{x} .

Dann gilt für das **zweiseitige $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall** für μ :

$$\left[\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

Das ist die gleiche Formel wie auf S.2 nur mit \bar{x} statt μ .

Dabei ist $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Standardnormalverteilung mit $0 < \alpha < 1$.

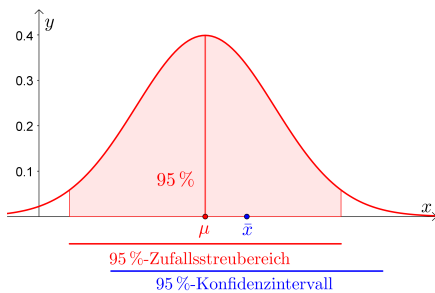
Bei gegebenem α , σ und n haben der Zufallsstrebereich und das Konfidenzintervall die gleiche Breite:

Intervallbreite = $\left(\bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) - \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right) =$

Zufallsstrebereich – Konfidenzintervall



Der **95 %-Zufallsstrebereich** um μ und das **95 %-Konfidenzintervall** um \bar{x} sind gleich breit.



Ob das berechnete Konfidenzintervall den Wert μ enthält, hängt vom Stichprobenmittelwert \bar{x} ab:

- Wenn \bar{x} im Zufallsstrebereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ .
- Wenn \bar{x} *nicht* im Zufallsstrebereich von μ liegt, dann enthält das Konfidenzintervall den Wert μ *nicht*.

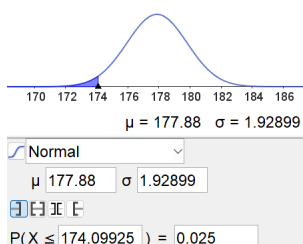
Der Stichprobenmittelwert \bar{x} liegt mit der Wahrscheinlichkeit 95 % im 95 %-Zufallsstrebereich.

Also enthält das 95 %-Konfidenzintervall den Erwartungswert μ mit der Wahrscheinlichkeit 95 %.

Berechnung ohne Formel



Bei *bekannter* Standardabweichung berechnen wir das Konfidenzintervall wie den Zufallsstrebereich:

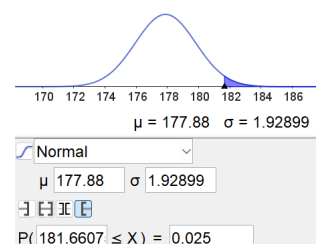


Nur verwenden wir \bar{x} statt μ :

$\bar{x} = 177,88$ cm $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} =$

95 %-Konfidenzintervall für μ :

[cm; cm]



Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ



Die Körpergröße von 42-jährigen Frauen ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *unbekannter* Standardabweichung σ . Wir sollen den Erwartungswert μ schätzen.

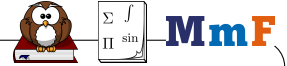
Dazu wählen wir 42-jährige Frauen nach dem Zufallsprinzip aus und messen ihre Körpergrößen (in cm):

169,9	172,0	172,1	171,1	165,8	165,9	153,1	171,5	168,6	167,2
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Berechne das **zweiseitige 95 %-Konfidenzintervall** für den Erwartungswert μ .

Unter diesen Voraussetzungen müssen wir sowohl μ als auch σ aus der Stichprobe schätzen.

Erwartungstreue Schätzer



Gegeben ist eine Stichprobe mit n Werten x_1, x_2, \dots, x_n .

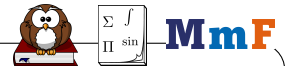
Die bestmögliche Schätzung für μ ist das arithmetische Mittel \bar{x} der Stichprobe:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

Die bestmögliche Schätzung für σ ist die Stichproben-Standardabweichung s_{n-1} :

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Zweiseitiges Konfidenzintervall für μ bei unbekanntem σ



Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit *unbekanntem* Erwartungswert μ und *unbekannter* Standardabweichung $\sigma > 0$.

Eine Stichprobe der Größe n hat den Mittelwert \bar{x} und die Stichproben-Standardabweichung s_{n-1} .

Dann gilt für das **zweiseitige $(1 - \alpha)$ -Konfidenzintervall** für μ :

$$\left[\bar{x} - t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{f;1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] \text{ mit } f = n - 1$$

Dabei ist $t_{f;1-\frac{\alpha}{2}}$ das $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student- t -Verteilung mit f Freiheitsgraden mit $0 < \alpha < 1$.

Bei unbekanntem σ hängt die **Breite des Konfidenzintervalls** von s_{n-1} und damit (auch bei fester Größe n) von der Stichprobe ab.

Berechnung mit Formel



1) Liste mit Messwerten in der Tabellen-Ansicht erzeugen
Rechtsklick \rightsquigarrow Erzeugen \rightsquigarrow Liste

2) Mittel(<Liste von Zahlen>)
In manchen GeoGebra-Versionen: **mean** oder **Mittelwert**

3) stdev(<Liste von Rohdaten>) „standard deviation“
In manchen GeoGebra-Versionen: **StichprobenStandardabweichung**

4) $(1 - \frac{\alpha}{2})$ -Quantil der Student- t -Verteilung mit $n - 1$ Freiheitsgraden ermitteln

95 %-Konfidenzintervall für μ :

$$\left[\bar{x} - t_{9;0,975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} ; \bar{x} + t_{9;0,975} \cdot \frac{s_{n-1}}{\sqrt{n}} \right] = [\quad] \text{ cm}; [\quad] \text{ cm}$$

Alternativer Lösungsweg:

- 1) Daten in Tabellen-Ansicht eingeben
- 2) Daten markieren und Analyse einer Variablen auswählen: \rightarrow Analyse
- 3) Statistik anzeigen: $\sum x$
- 4) Dropdown-Menü:
- 5) Konfidenzniveau 95 % eingeben

Algebra	CAS	Tabelle
Liste	1 m:=Mittel(I1)	f: F K
Zahl	≈ m := 167.72	A
m = 167.72	2 s:=stdev(I1)	1 169.9
s = 5.67407	≈ s := 5.67407	2 172
t = 2.26216	3 t:=2.26216	3 172.1
	≈ t := 2.26216	4 171.1
	4 m-t*s/sqrt(10)	5 165.8
	≈ 163.66101	6 165.9
	5 m+t*s/sqrt(10)	7 153.1
	≈ 171.77899	8 171.5
		9 168.6
		10 167.2

