

**AUFGABENSAMMLUNG – FREIER FALL MIT LUFTWIDERSTAND**

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
1. Grundlegende Überlegungen zum freien Fall mit und ohne Luftwiderstand	2
2. Wie stark ändert sich die Fallbeschleunigung während des freien Falls?	4
3. Wie stark ändert sich die Luftdichte während des freien Falls?	5
4. Freier Fall mit Luftwiderstand bei konstantem $\rho$ und $g$	7
5. $c_w$ -Wertbestimmung durch Fallversuche	10
6. Erstellen einer Fallsimulation	11
Hilfestellungen und Lösungen	16



EINLEITUNG

Man kann Bewegungen grob in unbeschleunigte (1) und beschleunigte (2) einteilen. Die unbeschleunigten Bewegungen kommen zwar im Alltag praktisch nicht vor, sind aber am einfachsten zu beschreiben. Die Gleichung  $v = s/t$ , mit der Fall 1 beschrieben werden kann, wird daher schon in der Unterstufe unterrichtet. Man kann mit ihr aber auch die Durchschnittsgeschwindigkeit berechnen. Fall 2, die beschleunigten Bewegungen, kann man noch einmal in gleichmäßig (2a) und ungleichmäßig beschleunigte Bewegungen (2b) unterteilen. Fall 2a wird im Rahmen des idealisierten freien Falls ohne Luftwiderstand und des Bremsweges von Fahrzeugen im Physikunterricht meistens recht ausführlich behandelt.

Anders verhält es sich mit Fall 2b, der im Physikunterricht meist eher stiefmütterlich behandelt wird, im Alltag allerdings den Großteil der Bewegungen ausmacht, etwa beim Zuluftgehen, beim Stop-and-go im Straßenverkehr oder bei den realen Situationen des freien Falls unter Berücksichtigung des Luftwiderstands. Hier sehen wir uns die letztgenannte, reale Fallsituation genauer an. Die Aufgaben sollen dich, unterstützt durch Experimente, Schritt für Schritt in die Thematik einführen. Die Lösungen im Anhang für eine bestimmte Aufgabe sind oft wichtig, um die nächste Aufgabe lösen zu können.

---

*Datum:* 3. Februar 2021.



ABBILDUNG 1. Löwenzahnsamen fliegen wie kleine Fallschirme durch die Luft

1. GRUNDLEGENDE ÜBERLEGUNGEN ZUM FREIEN FALL MIT UND OHNE LUFTWIDERSTAND

**1.1.** Sehen wir uns zunächst die Verhältnisse ohne Luftwiderstand an. Überlege mit Hilfe der Fallbeschleunigung  $g$ , wie im luftleeren Raum die Geschwindigkeit mit der Zeit zunimmt. Nimm dazu den gerundeten Wert  $g = 10 \text{ m/s}^2$  an und skizziere ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm. Nach wie vielen Sekunden würde ein fallendes Objekt rein theoretisch die Schallmauer durchbrechen? Könnte so eine Situation tatsächlich so oder so ähnlich vorkommen?

**1.2.** Beim realen freien Fall wächst natürlich die Geschwindigkeit nicht linear mit der Zeit an, weil neben der Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$  noch eine zusätzliche Kraft auftritt. Welche ist das? Mit welcher Gleichung kann sie beschrieben werden?

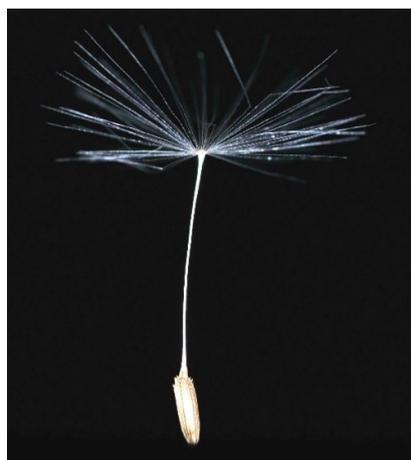


ABBILDUNG 2. Welche Kraft ist für den sanften Flug eines Löwenzahnsamens verantwortlich?

**1.3.** Was bedeuten die einzelnen Konstanten und Variablen in der Gleichung für die Luftwiderstandskraft? Überlege mit Hilfe der Lösung von [1.2!](#)

**1.4.** Wie steigt die Luftwiderstandskraft  $F_L$  mit zunehmender Geschwindigkeit  $v$  an? Anders gefragt: Welcher proportionale Zusammenhang besteht zwischen Luftwiderstandskraft und Geschwindigkeit? Überlege mit Hilfe der Lösungen von [1.2](#) und [1.3](#). Skizziere ein Diagramm, in welchem du die Luftwiderstandskraft über der Fallgeschwindigkeit aufträgst.

**1.5.** Überlege ganz allgemein, welche Geschwindigkeit  $v_{max}$  ein in Luft fallendes Objekt maximal erreichen kann. Bedenke dabei, dass die beiden auftretenden Kräfte genau in die Gegenrichtung zeigen und bei der Maximalgeschwindigkeit gleich groß werden. Versuche eine Gleichung herzuleiten, indem du die beiden Formeln für die beim freien Fall auftretenden Kräfte aus [1.2](#) und [1.3](#) gleichsetzt.

## 2. WIE STARK ÄNDERT SICH DIE FALLBESCHLEUNIGUNG WÄHREND DES FREIEN FALLS?

**2.1.** Die Fallbeschleunigung  $g$  variiert wegen der Drehung der Erde, der dadurch hervorgerufenen Abplattung und der ungleichmäßigen Erddichte regional ein wenig. Abgesehen davon sinkt  $g$  mit zunehmender Seehöhe ab. Gib ohne zu rechnen einen intuitiven Tipp ab, ob diese Änderung so groß ist, dass man sie beim freien Fall berücksichtigen muss. Wir werden deine Annahme in den folgenden Punkten überprüfen.

**2.2.** Die Gewichtskraft wird normalerweise mit der Formel  $F_G = m \cdot g$  berechnet. Gewichtskraft ist aber nichts anderes als die gegenseitige Anziehungskraft zwischen zwei Objekten, also in unserem Fall dem fallenden Objekt (Masse  $m$ ) und der Erde (Masse  $M$ ). Diese Anziehungskraft kann man auch mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz berechnen:

$$F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$$

Welcher Zusammenhang besteht daher zwischen der Fallbeschleunigung und der Seehöhe?

**2.3.** Erstelle eine Wertetabelle und dann ein Diagramm, in dem du die Fallbeschleunigung  $g$  in Abhängigkeit der Seehöhe von 0 bis 40 000 m aufträgst. Bedenke dabei, dass bei einer Seehöhe von 0 m der Abstand  $r$  in der Gleichung für die Gravitationskraft aus Aufgabe 2.2 dem Erdradius entspricht, den wir vereinfacht mit 6370 km annehmen. Die Gravitationskonstante  $G$  hat den Wert  $6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ , die Erdmasse beträgt  $5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ .

**2.4.** Selbst in 40 km Höhe ist der Wert von  $g$  also erst auf  $9,69 \text{ m/s}^2$  abgesunken. Was bedeutet das aber in Prozent? Erstelle eine Wertetabelle und dann eine Grafik wie oben, gib auf aber der  $y$ -Achse die Prozent an, wobei 100 % dem Wert der Fallbeschleunigung auf Seehöhe entsprechen sollen. Überlege anhand dieses Diagramms, ob es Situationen gibt, in denen es nötig ist, die Änderung von  $g$  beim Fallen zu berücksichtigen.

**2.5.** Die Internationale Raumstation ISS (Abbildung 3) befindet sich 320 km bis 460 km über der Erdoberfläche. Durch Reibung mit der in diesen Höhen zwar sehr dünnen, aber immer noch vorhandenen Atmosphäre verliert sie so pro Tag 50 m bis 150 m. Diese Höhenverluste werden in unregelmäßigen Abständen ausgeglichen, indem angedockte Raumschiffe die ISS in Flugrichtung beschleunigen. Man nennt das ein Reboost-Manöver. Auf welche Werte ist die Fallbeschleunigung in 320 km bis 460 km über der Erde abgesunken? Wie erklärt sich die Schwerelosigkeit, die im Inneren der Station herrscht?



ABBILDUNG 3. Die Internationale Raumstation ISS in voller Pracht

### 3. WIE STARK ÄNDERT SICH DIE LUFTDICHTE WÄHREND DES FREIEN FALLS?

Die Erdatmosphäre wird nach unten hin dichter, weil auf den weiter unten liegenden Schichten immer mehr Luft lastet und diese, im Gegensatz zu Wasser, kompressibel ist. Diese nach unten zunehmende Dichte der Atmosphäre ist auf Bildern aus dem Weltall sehr gut zu sehen (Abbildung 4). Mit der Veränderung der Luftdichte verändert sich aber auch die maximale Fallgeschwindigkeit. Wie stark wirkt sich der Effekt aus?



ABBILDUNG 4. Die Erdatmosphäre aus dem All gesehen

**3.1.** Die Atmosphärendichte hängt nicht nur vom Gewicht der darüberliegenden Luft ab, sondern auch von der Temperatur in der entsprechenden Höhe, die wiederum von der geographischen Breite und vom Wetter abhängt. Deshalb hat man Mitte der 1970er das Modell der Norm- oder Standardatmosphäre geschaffen. Dieses gilt streng genommen nur bei Normaldruck in mittleren Breiten und bei  $15^\circ$  auf Meeresniveau. Es vermittelt aber einen guten Anhaltspunkt über die Druck- und Dichteänderungen mit der Höhe (Tabelle 1). Übertrage die Werte der ersten beiden Spalten in ein Tabellenkalkulationsprogramm und stelle die  $y$ -Achse einmal normal und einmal logarithmisch dar. Besteht zwischen Seehöhe und Luftdichte ein exponentieller Zusammenhang?

Höhe in m	$\rho$ in $kg/m^3$	$\rho$ in %
0	1,226	100,00
1000	1,112	90,70
2000	1,007	82,14
3000	0,909	74,14
4000	0,819	66,80
5000	0,736	60,03
10 000	0,413	33,69
15 000	0,194	15,82
20 000	0,088	7,18
25 000	0,039	3,18
30 000	0,012	0,98
35 000	0,006	0,49
40 000	0,004	0,33

TABELLE 1. Luftdichte in Abhängigkeit von der Seehöhe laut Standardatmosphäre

**3.2.** Wie verändert sich  $v_{max}$  bei Sprüngen in der Stratosphäre gegenüber solchen in geringen Höhen? Nimm an, jemand erreicht in 30 km Höhe seine Maximalgeschwindigkeit. Schätze ohne Taschenrechner ab, um welchen Faktor dort die Fallgeschwindigkeit höher ist als auf Meeresniveau. Vernachlässige bei deiner Schätzung, dass in dieser Höhe die Fallbeschleunigung 1 % geringer ist als auf der Erdoberfläche (Tabelle 1).

**3.3.** In Abbildung 5 siehst du zwei Simulationen gegenübergestellt, und zwar einen Sprung aus 3000 m beziehungsweise aus 40 000 m Höhe. Die Werte für  $m$ ,  $A$  und  $c_w$  wurden in beiden Fällen gleich angenommen. Beschreibe qualitativ die Unterschiede, die dir auffallen. Überlege weiters, welcher Zusammenhang zu 1.1 besteht.

**3.4.** Übertrage die Werte von 0 m bis 5000 m Seehöhe in ein Diagramm und passe sie mit Hilfe einer Tabellenkalkulation einerseits mit einer Exponentialfunktion und andererseits mit einer linearen Funktion an. Lass dir auch das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  angeben. Dieses gibt vereinfacht gesagt an, welcher Wert der Streuung, also letztlich die  $y$ -Verteilung der Werte, durch das Regressionsmodell erklärt werden kann. Wenn der Wert 1 beträgt, liegen alle Werte exakt auf der Regressionskurve, es können also 100 % der Datenstreuung durch das Modell erklärt werden. Bei einem Wert von 0,9 können 90 % der Streuung durch das Modell erklärt werden und so weiter. Welche Schlussfolgerungen kannst du aus den beiden Kurvenanpassungen ziehen?

**3.5.** Leite aus den Erkenntnissen zu 3.4 eine möglichst einfache Faustregel ab, wie sich die Luftdichte mit der Höhe verändert. Nimm dazu den einfacheren Fall der linearen Anpassung.

**3.6.** Überlege mit Hilfe von 3.5, unter welchen Bedingungen man beim freien Fall die Änderung der Luftdichte miteinbeziehen muss.

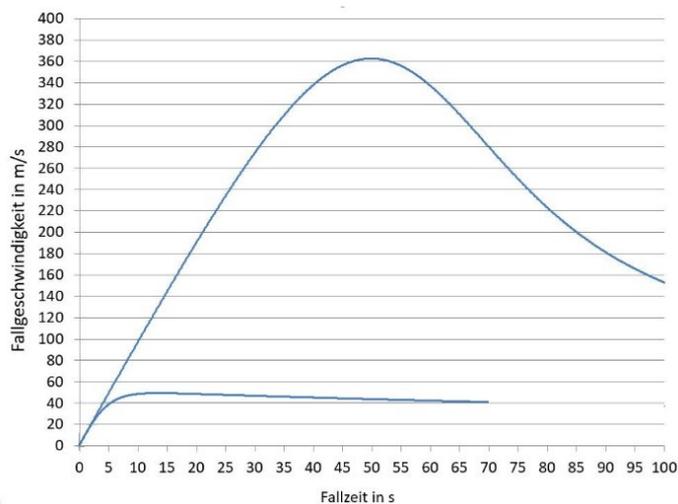


ABBILDUNG 5. Simulation zweier Sprünge im luftefüllten Raum aus 3 km und 40 km Höhe. Es wurden dabei folgende Werte angenommen:  $m = 140$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup> und  $c_w = 1$ . Diese Werte entsprechen Ausrüstung und Situation bei einem Stratosphärensprung.

4. FREIER FALL MIT LUFTWIDERSTAND BEI KONSTANTEM  $\rho$  UND  $g$

In den Abschnitten 2 und 3 haben wir hergeleitet, dass die Veränderungen von  $\rho$  und von  $g$  nur in sehr speziellen Fällen berücksichtigt werden müssen. Für die folgenden Überlegungen gehen wir daher davon aus, dass diese beiden Werte konstant bleiben und nur  $m$ ,  $A$  und  $c_w$  variieren.

4.1. In Tabelle 2 siehst du den  $c_w$ -Wert verschiedener Objekte. Schätze mit Hilfe einer Fermi-Rechnung die Maximalgeschwindigkeit  $v_{max}$  für einen Fallschirmspringer ab, der seinen Schirm noch nicht geöffnet hat (Abbildung 6). Nimm an, dass er mit Ausrüstung eine Masse von 100 kg hat. Nimm als Luftdichte den Standardwert in 2000 m Höhe (Tabelle 1). Als Richtwert für die Größe der Schattenfläche hilf dir mit der Legende in Abbildung 11. Welchen  $c_w$ -Wert aus Tabelle 2 kannst du verwenden?



ABBILDUNG 6. Fallschirmspringer in typischer Position

4.2. Überlege zuerst qualitativ, welche beiden Effekte beim Öffnen des Fallschirms das Tempo verringern. Welcher der beiden ist der Wichtigere? Schätze dann quantitativ ab, auf welchen Wert  $v_{max}$

Objekt	$c_w$ -Wert
Halbkugelschale, konkave Seite	1,33
runde Scheibe, quadratische Platte	1,11
Mensch, stehend*	0,78
Fahrrad (aufrecht)*	0,53 . . . 0,69
Kugel	0,45
Fahrrad (Rennrad)*	0,4
Halbkugelschale, konvexe Seite	0,34
Flugzeug (Bezugsfläche Tragfläche)	0,08
Stromlinienkörper „Tropfenform“	0,04
Pinguin	0,03

TABELLE 2. Beispiele für  $c_w$ -Werte. Die mit \* gekennzeichneten Werte sind als Richtwerte anzusehen, da sie von der jeweiligen Situation abhängen.

beim Öffnen des Schirms absinkt. Welcher  $c_w$ -Wert aus Tabelle 2 kann sinnvollerweise verwendet werden? Nimm einen runden Fallschirm (Abbildung 7) mit einem Durchmesser von 7 m an.



ABBILDUNG 7. Ein geöffneter, runder Fallschirm: Das Loch in der Mitte dient der Stabilisierung.

**4.3.** Die Abschätzung in 4.2 ergibt eine Sinkgeschwindigkeit von 8,1 m/s (29 km/h). Aus welcher Höhe muss man ohne Fallschirm springen, damit man diese Geschwindigkeit erreicht? Was zeigt deine Berechnung?

**4.4.** Mary Poppins (Abbildung 8) ist ein mit magischen Fähigkeiten ausgestattetes Zimmermädchen. In einer berühmten Filmszene schwebt sie, ihren Schirm als Fallschirm benutzend, langsam zur Erde. Schätze ab, wie schnell sie auf diese Art und Weise tatsächlich wäre, wenn sie nicht mit Magie nachhelfen würde.



ABBILDUNG 8. Mary Poppins und ihr (Fall-)Schirm

4.5. Bei manchen heftigen Platzregen sind die Tropfen so groß, dass sie beim Aufprallen auf den Körper richtig wehtun. Überlege allgemein, warum größere Regentropfen eine größere  $v_{max}$  erreichen müssen. Rechne dazu mit Hilfe von Proportionen.



ABBILDUNG 9. Bei einem heftigen Platzregen schmerzen mitunter die aufprallenden Regentropfen.

5.  $c_w$ -WERTBESTIMMUNG DURCH FALLVERSUCHE

**5.1.** Mit einfachen Mitteln kannst du den  $c_w$ -Wert eines Objekts selbst bestimmen. Sehr gut eignen sich dazu Backformen für Muffins oder Cupcakes (Abbildung 10), weil man diese für wenig Geld in Klassenstärke kaufen kann, weil sie langsam fallen und sie sich leicht vermessen lassen. Überlege in einem ersten Schritt mit Hilfe der Gleichung

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_w \cdot A}}$$

welche der Variablen bekannt sind und welche du im Experiment bestimmen kannst. Wie könntest du dabei vorgehen? Wie musst du die Gleichung umstellen, um auf den  $c_w$ -Wert zu kommen?



ABBILDUNG 10. Backformen für Muffins und Cupcakes eignen sich ausgezeichnet für Fallexperimente – natürlich ohne Inhalt!

**5.2.** Bestimme mit Hilfe einer Präzisionswaage die Masse einer Backform. Wie solltest du dabei am besten vorgehen, damit du das genaueste Resultat bekommst?

**5.3.** Eruiere die Schattenfläche. Gehe dabei vereinfacht von einer kreisrunden Randlinie aus (Abbildung 11). Was musst du beim Messen beachten?

**5.4.** Eruiere nun durch Fallversuche die  $v_{max}$  der Backformen. Lass diese, wenn möglich, aus einigen Metern Höhe fallen, etwa in einem Stiegenhaus. Du kannst die Formen natürlich auch aus Türstockhöhe fallen lassen, aber dann fallen die Ungenauigkeiten bei den Stoppungen mehr ins Gewicht. Bringe am oberen Ende der Fallstrecke eine Markierung an oder lege eine bereits vorhandene Struktur als obere Markierung fest, etwa den Handlauf eines Geländers oder den oberen Rand eines Türstockes oder ähnliches. Lass die Form etwa 50 cm über der Markierung fallen, damit sie bei dieser schon ihre maximale Geschwindigkeit erreicht hat. Stoppe, wie lange die Form zum Durchfallen der Messstrecke braucht, also von der oberen Markierung bis zum Boden. Um die Genauigkeit zu erhöhen, führe mehrere Stoppungen durch und nimm den Mittelwert. Berechne dann mit Hilfe der Überlegungen aus 5.1 bis 5.3 den  $c_w$ -Wert.

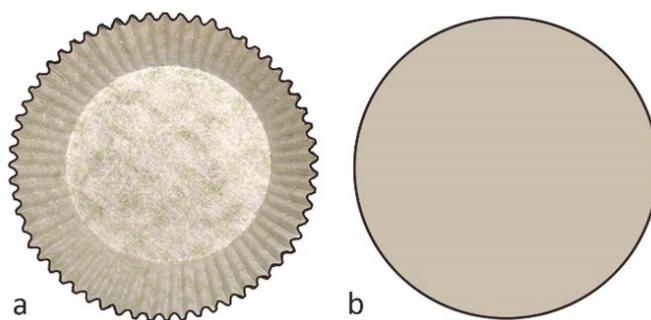


ABBILDUNG 11. Die Schattenfläche entspricht der Fläche innerhalb der Kontur, wenn man die Form genau von oben betrachtet (a). Vereinfache diese Form durch eine Kreisfläche (b).

### 6. ERSTELLEN EINER FALLSIMULATION

Mit einem Tabellenkalkulationsprogramm lässt sich numerisch der Geschwindigkeitsverlauf eines Objekts, das durch die Luft fällt, „simulieren“. In unserem Beispiel hier werden wir Excel verwenden, über das die meisten Schüler\*innen in den Schulen verfügen. Wir nehmen als Testfall die Daten für die Backformen, die wir in Abschnitt 5 zur Bestimmung des  $c_w$ -Werts verwendet haben. Erstelle die numerische Simulation Schritt für Schritt mit Hilfe der folgenden Punkte. Die fertige Tabelle findest du auch in der Datei [freier\\_Fall\\_1.xlsx](#).

**6.1.** Trage im Tabellenkopf zunächst einmal alle experimentell bestimmten Werte ein, also Masse (5.2), Schattenfläche (5.3) und  $c_w$ -Wert (5.4). Trage weiters Fallbeschleunigung, Fallhöhe und das gewünschte Zeitintervall für die „Schrittweite“ der numerischen Berechnung ein (Abbildung 12).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Simulation eines freien Falles unter Luftwiderstand						
2							
3	Masse m	0,0004 kg			Fallbeschl. g	9,81 m/s <sup>2</sup>	
4	Schattenfl. A	0,0034 m <sup>2</sup>			Höhe h	1 m	
5	$c_w$ -Wert	1,07			Zeitintervall	0,01 s	

ABBILDUNG 12. die Fixwerte im Tabellenkopf

**6.2.** Lege nun die einzelnen Spalten an, so wie in Abbildung 13 in Zeile 8 und 9 dargestellt. Ihre Bedeutung wird in den folgenden Schritten noch genau erklärt. Durch diese Spalten ist es möglich, Kräfte, Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und letztlich auch die neue Fallhöhe in kleinen Zeitschritten zu berechnen.

**6.3.** Sehen wir uns die Werte in den ersten fünf Spalten an (Zelle A10 bis E10 in Abbildung 13):

Als Startzeit in A10 gibst du den Wert „0“ ein. Für die Höhe in B10 übernimmst du den Wert aus Zelle F4. In Zelle B10 schreibst du also „=F4“. Durch Ändern von Zelle F4 kannst du somit später die Anfangshöhe ändern, etwa um einen Fallschirmsprung oder einen Stratosphärensprung zu simulieren.

ABBILDUNG 13. Die für die numerische Berechnung benötigten Werte befinden sich in den grün markierten Zellen in A3 bis G5.

Für die Anfangsgeschwindigkeit in Zelle C10 gibst du ebenfalls den Wert „0“ ein.

Die Gewichtskraft wird durch  $F_G = m \cdot g$  berechnet. In Zelle D10 gibst du daher „ $=B\$3*F\$3$ “ ein. Die  $\$$ -Zeichen vor den Buchstaben und Zahlen bedeuten, dass beim Kopieren der Zellen immer absolut auf diese beiden Zellen zurückgegriffen wird, es wird also Zeilen- und Spaltennummer nicht um den Wert 1 erhöht. Auf unsere Masse von 0,0004 kg wirkt eine Gewichtskraft von 0,003924 N.

Gib in Zelle E10 für die Luftdichte den absoluten Wert 1,226 ein. Das entspricht der Dichte der Standardatmosphäre auf Meeresebene (Tabelle 1). Dieser Wert bleibt für unsere Simulation gleich. In 6.9 wirst du aber dann in dieser Spalte eine variable Dichte mit Hilfe einer Gleichung einfügen, um einen Fallschirmsprung zu berechnen.

**6.4.** Sehen wir uns nun die 6. bis 8. Spalte an (Zelle F10 bis H10 in Abbildung 13): In Zelle F10 berechnest du die aktuelle Luftreibungskraft. Diese wird mit der Formel

$$F_L = 1/2 \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$

berechnet. Du musst in die Zelle daher „ $=0,5*E10*\$B\$5*\$B\$4*C10^2$ “ eintragen.  $c_w$ -Wert und Schattenfläche werden absolut aus dem Tabellenkopf übernommen – daher die  $\$$ -Zeichen. Luftdichte und Geschwindigkeit werden aus der jeweiligen Zeile genommen, weil sie sich im Flug ändern beziehungsweise ändern könnten. Weil  $v$  zu Beginn null ist, ist natürlich auch  $F_L$  null.

In Zelle G10 berechnest du nun die Gesamtkraft, die auf das fallende Objekt wirkt, also Gewichtskraft minus Luftwiderstandskraft:  $F_{GES} = F_G - F_L$ . In Zelle G10 gibst du daher „ $=D10-F10$ “ ein.

In Zelle H10 wird die aktuelle Beschleunigung des Objekts mit Hilfe der Grundgleichung der Mechanik (2. Newton'sches Axiom) berechnet. Aus  $F_{GES} = m \cdot a$  folgt  $a = \frac{F_{GES}}{m}$ . In Zelle H10 gibst du daher „ $=G10/\$B\$3$ “ ein. Weil noch keine Luftwiderstandskraft wirkt, gilt in diesem Fall  $a = g$ .

**6.5.** Nun kommen wir zu den wesentlichen Spalten I bis M (Zelle I10 bis M10 in Abbildung 13)

Die Schwierigkeit bei der Berechnung der neuen Geschwindigkeit ist die, dass eine Veränderung von  $v$  zu einer Veränderung der Luftwiderstandskraft  $F_L$  führt, wodurch sich wieder die Beschleunigung  $a$  verändert. Um diesem Teufelskreis zu entgehen, nehmen wir vereinfacht an, dass sich die Kräfte und

somit auch die Beschleunigungen in einem sehr kurzen Zeitintervall nicht ändern. Dieses Zeitintervall beträgt bei uns 1/100s. Wir nehmen also an, dass unser Objekt 1/100s gleichmäßig beschleunigt wird.

Generell gilt bei einer gleichmäßigen Beschleunigung  $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  und somit  $\Delta v = a \cdot \Delta t$ . Die Endgeschwindigkeit in unserem Intervall ist daher

$$v_{\text{Ende}} = v_{\text{Anfang}} + \Delta v = v_{\text{Anfang}} + a \cdot \Delta t$$

In Zelle I10 gibst du daher „=C10+H10\*\$F\$5“ ein. Unsere Endgeschwindigkeit nach 1/100s beträgt 0,098 m/s.

Um den zurückgelegten Weg zu berechnen, müssen wir aber die Durchschnittsgeschwindigkeit nehmen. Es gilt  $v_{\text{mittel}} = \frac{v_{\text{Anfang}} + v_{\text{Ende}}}{2}$ . In Zelle J10 gibst du daher „=(C10+I10)\*0,5“ ein. Die durchschnittliche Geschwindigkeit beträgt in unserem Fall 0,049 m/s.

Für gleichbleibende Geschwindigkeiten gilt  $v = \Delta s / \Delta t$  und somit  $\Delta s = v \cdot \Delta t$  beziehungsweise in unserem Fall  $\Delta s = v_{\text{mittel}} \cdot \Delta t$ . In Zelle K10 gibst du daher „=J10\*\$F\$5“ ein. Der in dieser ersten 1/100s zurückgelegte Wert beträgt bloß 0,000491 m, also 0,491 mm. Diesen Wert kannst du nur dann sehen, wenn die Anzahl der angezeigten Nachkommastellen in dieser Zelle mehr als 3 beträgt (Abbildung 14).

$v_{\text{Ende}}$ m/s	$v_{\text{mittel}}$ m/s	$\Delta s$ m	$h_{\text{neu}}$ m	$v$ km/h
0,098	0,049	0,000491	1,000	0,177
0,196	0,147	0,001	0,998	0,529
0,292	0,244	0,002	0,996	0,877
0,385	0,338	0,003	0,992	1,218

ABBILDUNG 14. Der zurückgelegte Weg  $\Delta s$  in der ersten 1/100s beträgt weniger als 1 mm. Nur wenn du die Anzahl der Stellen erhöhst, kannst du den Wert sehen.

Um auf die neue Höhe zu kommen, musst du den zurückgelegten Weg von der ursprünglichen Höhe abziehen, es gilt also  $h_{\text{neu}} = h - \Delta s$ . In Zelle L10 gibst du daher „=B10-K10“ ein. Im Prinzip haben wir nun alle Werte beisammen. Die letzte Spalte ist optional dazu da, um den Wert der neuen Endgeschwindigkeit aus Zelle I10 in km/h umzurechnen, weil man sich km/h in vielen Fällen besser vorstellen kann, etwa bei einem Fallschirmsprung.

**6.6.** Wir gehen nun in die nächste Zeile, in unserem Tabellenbeispiel also in Zeile 11 (Abbildung 14). Der Großteil der Werte kann hier von der oberen Zeile einfach kopiert werden, nur einige Werte musst du noch einmal gegenüber der ersten Zeile geändert eingeben. Sehen wir uns das der Reihe nach an.

Die neue Zeit in dieser Zeile ergibt sich aus der alten Zeit in der Zeile darüber plus dem Zeitintervall  $\Delta t$  in Zelle F5. In Zelle A11 gibst du daher „=A10\*\$F\$5“ ein. Die Berechnung startet in der Höhe,

Zeit	h	V <sub>aktuell</sub>	F <sub>G</sub>	ρ	F <sub>L</sub>	F <sub>netto</sub>	a	V <sub>idee</sub>	V <sub>neu</sub>	Δs	h <sub>neu</sub>	v	
s	m	m/s	Newton	kg/m³	Newton	Newton	m/s²	m/s	m/s	m	m	km/h	
0	1,000000	0,000000	0,003924	1,2260	0,000000	0,003924	9,810000	0,098100	0,049050	0,000491	0,999510	0,177	
11	0,01	0,999510	0,098100	0,003924	1,2260	0,00021	0,003903	9,756346	0,195663	0,146882	0,001469	0,998041	0,529

ABBILDUNG 15. die zweite Zeile der Berechnungen, in unserem Fall Zeile 11

auf die das Objekt im ersten Zeitintervall gefallen ist, also auf  $h_{neu}$ , das sich in L10 eine Zeile darüber befindet. In B11 gibst du also „=L10“ ein.

Die neue Anfangsgeschwindigkeit ist die Endgeschwindigkeit aus der Zeile darüber. In C11 gibst du daher „=I10“ ein. Die Werte in allen weiteren Spalten kannst du von oben übernehmen. Damit die Werte in der neuen Zeile automatisch richtig berechnet werden, markierst du zuerst die Zellen D10 bis M10 mit der Maus. Dann gehst du in die rechte untere Ecke von Zelle M10. Es erscheint ein kleines Kreuz. Nun hältst du die linke Maustaste gedrückt und ziehst die Maus eine Zeile nach unten. Die Werte in Zeile 11 werden nun automatisch berechnet und müssen so aussehen wie in Abbildung 15 – mit einer Ausnahme. In Zelle E11 steht nun der Wert „2,2260“, weil Excel hier automatisch den Wert 1 addiert. Diese Zelle musst du noch einmal extra von oben kopieren.

Nun markierst du die gesamte Zeile 11, gehst wieder auf die rechte untere Ecke in Zelle M11 und hältst die linke Maustaste gedrückt. Diesmal ziehst du allerdings die Werte bis zur Zeile 94 hinunter.

Du musst jetzt noch einmal eine manuelle Korrektur durchführen, weil Excel bei der Dichte in jeder Zeile den Wert 1 addiert (Abbildung 16, Spalte E). Deshalb musst du Zelle E11 markieren und mit gehaltener Maustaste ebenfalls bis Zeile 94 runterziehen. Dann stimmen die Werte wieder (Abbildung 17).

Zeit	h	V <sub>aktuell</sub>	F <sub>G</sub>	ρ	F <sub>L</sub>	F <sub>netto</sub>	
s	m	m/s	Newton	kg/m³	Newton	Newton	
0	1,000000	0,000000	0,003924	1,2260	0,000000	0,003924	
11	0,01	0,999510	0,098100	0,003924	1,2260	0,00021	0,003903
12	0,02	0,998041	0,195663	0,003924	2,2260	0,000155	0,003769
13	0,03	0,995613	0,289888	0,003924	3,2260	0,000493	0,003431
14	0,04	0,992285	0,375660	0,003924	4,2260	0,001085	0,002839
15	0,05	0,988174	0,446640	0,003924	5,2260	0,001896	0,002028
16	0,06	0,983454	0,497331	0,003924	6,2260	0,002801	0,001123
17	0,07	0,978340	0,525403	0,003924	7,2260	0,003628	0,000296
18	0,08	0,973049	0,532793	0,003924	8,2260	0,004248	-0,000324
19	0,09	0,967762	0,524704	0,003924	9,2260	0,004620	-0,000696
20	0,1	0,962602	0,507295	0,003924	10,2260	0,004787	-0,000863
21	0,11	0,957637	0,485721	0,003924	11,2260	0,004818	-0,000884

ABBILDUNG 16. Die fast fertige Tabelle mit noch falscher Spalte E...

Simulation eines freien Falles unter Luftwiderstand							
Masse m	0,0004 kg			Fallbeschl. g	9,81 m/s <sup>2</sup>		
Schattenfl. A	0,0034 m <sup>2</sup>			Höhe h	1 m		
c <sub>w</sub> -Wert	1,07			Zeitintervall	0,01 s		
Zeit	h	v <sub>aktuell</sub>	F <sub>s</sub>	ρ	F <sub>w</sub>	F <sub>netto</sub>	
s	m	m/s	Newton	kg/m <sup>3</sup>	Newton	Newton	
0	1,000000	0,000000	0,003924	1,2260	0,000000	0,003924	
0,01	0,999510	0,098100	0,003924	1,2260	0,000021	0,003903	
0,02	0,998041	0,195663	0,003924	1,2260	0,000085	0,003839	
0,03	0,995604	0,291629	0,003924	1,2260	0,000190	0,003734	
0,04	0,992221	0,384987	0,003924	1,2260	0,000331	0,003593	
0,05	0,987922	0,474824	0,003924	1,2260	0,000503	0,003421	
0,06	0,982746	0,560354	0,003924	1,2260	0,000700	0,003224	
0,07	0,976740	0,640948	0,003924	1,2260	0,000916	0,003008	
0,08	0,969954	0,716144	0,003924	1,2260	0,001144	0,002780	
0,09	0,962445	0,785651	0,003924	1,2260	0,001377	0,002547	
0,1	0,954270	0,849338	0,003924	1,2260	0,001609	0,002315	
0,11	0,945488	0,907220	0,003924	1,2260	0,001835	0,002089	

ABBILDUNG 17. ... und nach der manuellen Korrektur.

Nun hast du den freien Fall mit Luftwiderstand bis zum Aufprallen auf dem Boden simuliert. Das erkennst du daran, dass in Zelle L94  $h_{neu}$  auf unter null gesunken ist – was natürlich nicht möglich ist.

**6.7.** Verwende das in 6.6 fertiggestellte Tabellenblatt. Erstelle eine Grafik, in der die Fallgeschwindigkeit über der Zeit aufgetragen ist und eine, in der die Falltiefe über der Zeit aufgetragen ist. Überlege anhand der Grafik und der Daten in der Excel-Tabelle, ob es gerechtfertigt war, unsere Backformen 50 cm über der Markierung fallen zu lassen. Mit anderen Worten: Haben die Backformen ihre  $v_{max}$  bereits nach 50 cm erreicht?

**6.8.** Überprüfe nun, ob das gewählte Zeitintervall von 0,01 s passend ist. Dazu musst du nur den Wert in Zelle F5 ändern, der Rest in den Spalten unten und auch die bereits erstellten Grafiken ändern sich dann automatisch. Führe die Simulation für ein  $\Delta t$  von 0,04 s, 0,01 s (das war unser ursprünglicher Wert) und 0,005 s durch und schau nach, wie sich das Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm dadurch verändert. Welche Schlüsse kannst du daraus ziehen? Warum kann man argumentieren, dass  $v_{max}$  eigentlich niemals erreicht wird?

**6.9.** Simuliere zum Schluss noch einen Fallschirmsprung aus 5000 km Höhe. Gehe dazu wieder von deiner vorbereiteten Excel-Tabelle aus. Ändere die Werte im Tabellenkopf dabei folgendermaßen:  $m = 100$  kg,  $A = 1$  m<sup>2</sup>,  $c_w = 1$ ,  $h = 5000$  m und für das Zeitintervall 0,1 s. Die fertige Tabelle findest du auch in der Datei [freier\\_Fall\\_2.xlsx](#). Dazu musst du aber die Dichte als Formel in die Tabelle eingeben. Die Werte der Luftdichte lassen sich ja sehr gut mit der Formel  $y = 1,2308 \cdot e^{-10^{-4}x}$  anpassen (Abbildung 25). Gib daher in Zelle E10 „=1,2308\*EXP(-(10^-4)\*B10)“ ein. Markiere die Zelle und ziehe sie wieder mit dem Kreuz und gedrückter linken Maustaste eine Zeile nach unten. Markiere nun die ganze Zeile 11 und ziehe sie bis Zeile 905. Dann hat der Springer eine Höhe von 1000 m erreicht. Erstelle mit diesen Daten wiederum ein Zeit-Höhe- und ein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm.

HILFESTELLUNGEN UND LÖSUNGEN

**1.1 Hilfe:** Die Geschwindigkeit des Schalls in der Luft ist temperaturabhängig und beträgt bei 20 °C etwa 342 m/s.

**Lösung:** Wenn wir annehmen, dass die Fallbeschleunigung  $10 \text{ m/s}^2$  beträgt, dann bedeutet das, dass ohne Luftwiderstand, also ohne Bremsung, die Geschwindigkeit pro Sekunde um 10 m/s zunimmt. Zwischen der Zeit  $t$  und der Geschwindigkeit  $v$  besteht also ein linearer Zusammenhang (Abbildung 18). 342 m/s werden daher nach etwa 34 s Falldauer erreicht.

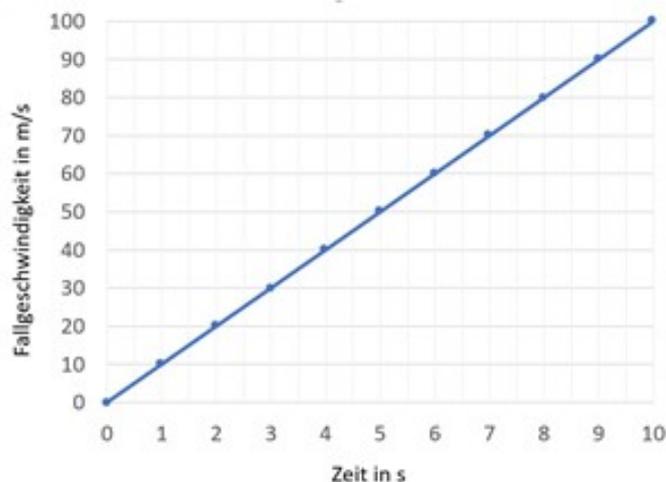


ABBILDUNG 18. Zusammenhang zwischen der Fallzeit und der Fallgeschwindigkeit bei einem freien Fall ohne Luftwiderstand.

Exakt solche Bedingungen kommen auf der Erde natürlich niemals vor. In großen Höhen ist die Luft jedoch sehr dünn und es liegt kaum ein Luftwiderstand vor. Deshalb wächst bei Sprüngen aus der Stratosphäre die Geschwindigkeit zu Beginn tatsächlich beinahe linear an (Abbildung 5). Einer der ersten Stratosphärensprünge wurde bereits 1960 vom US-amerikanischen Piloten Joe Kittinger aus einer Höhe von rund 31 km durchgeführt (Abbildung 19). Den aktuellen Höhen-Rekord hält Alan Eustace, der 2014 aus 41 km Höhe absprang.

**1.2 Hilfe:** Neben der Gewichtskraft tritt auch noch die Luftwiderstandskraft auf.

**Lösung:** Die Gleichung für die Luftwiderstandskraft lautet

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$



ABBILDUNG 19. 1960 sprang Joseph Kittinger bei dem Projekt Excelsior III aus einer Höhe von rund 31 Kilometern ab. Er sagte nach seinem Sprung: „Am Ende des Countdowns mache ich einen Schritt ins Leere. Kein Wind pfeift, meine Kleidung bläht sich nicht. Ich habe nicht die geringste Empfindung von der zunehmenden Geschwindigkeit.“ Der Grund dafür liegt in der geringen Luftdichte.

**1.3 Lösung:**  $\rho$  ist die Luftdichte und wird in  $\text{kg}/\text{m}^3$  angegeben.  $c_w$  ist der dimensionslose Strömungswiderstandskoeffizient, auch Widerstandskoeffizient, Stirnwiderstand oder kurz  $c_w$ -Wert genannt.  $A$  ist die Stirnfläche und wird in  $\text{m}^2$  angegeben. Sie wird auch plakativ Schattenfläche genannt, weil sie der Fläche des Schattens entspricht, den das Objekt werfen würde, wenn es mit parallelem Licht in oder gegen Bewegungsrichtung beleuchtet wird. Und  $v$  entspricht der Bewegungsgeschwindigkeit in  $\text{m}/\text{s}$ .

**1.4 Lösung:** Nehmen wir an, dass das Objekt Form und Lage während des Falls nicht ändert. Wenn wir eine konstante Luftdichte annehmen, was bei nicht zu großen Falltiefen näherungsweise der Fall ist, dann sind  $\rho$ ,  $c_w$  und  $A$  konstant. In diesem Fall ist die Luftwiderstandskraft proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit, es gilt also  $F_L \sim v^2$ . Wenn sich die Geschwindigkeit verdoppelt, vervierfacht sich die Luftwiderstandskraft, wenn sich die Geschwindigkeit verdreifacht, verneunfacht sich die Luftwiderstandskraft und so weiter (Abbildung 20).

**1.5 Hilfe:** Im freien Fall mit Luftwiderstand treten zwei Kräfte auf: Die Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$ , die immer konstant ist, und die Luftwiderstandskraft  $F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$ , die mit dem Quadrat der Geschwindigkeit anwächst. Die Maximalgeschwindigkeit ist dann erreicht, wenn beide Kräfte gleich groß sind. Dann heben beide Kräfte einander auf und die Gesamtkraft sinkt auf null ab.

**Lösung:** Weil die beiden Kräfte dann gleich groß sind, kann man die Formeln gleichsetzen und nach  $v$  umformen. Man erhält dann  $F_G = F_L$  beziehungsweise  $m \cdot g = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$

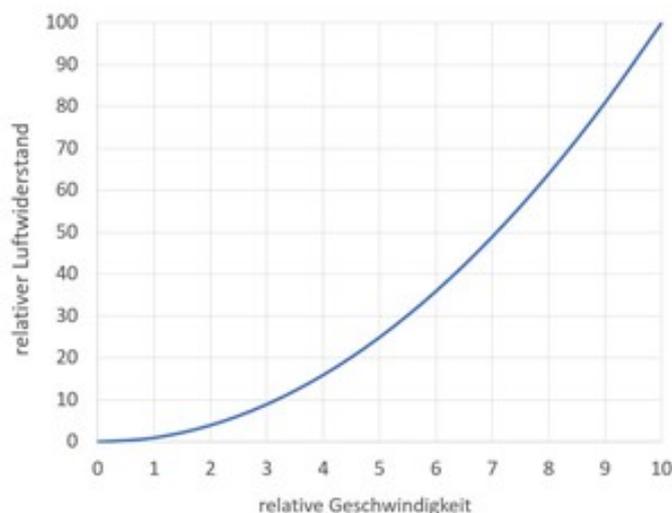


ABBILDUNG 20. Zusammenhang zwischen relativer Fallgeschwindigkeit und relativem Luftwiderstand

und somit  $v = v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_w \cdot A}}$ .

**2.2 Hilfe:** Weil man die Gewichtskraft mit zwei Formeln berechnen kann, kann man diese gleichsetzen und nach  $g$  auflösen.

**Lösung:** Aus  $F_G = m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$  folgt  $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$ . Da die Fallbeschleunigung nicht von der Masse des fallenden Objekts abhängt, muss sich diese natürlich wegekürzen. Weil die Gravitationskonstante  $G$  und die Masse  $M$  der Erde konstant sind, ergibt sich der proportionale Zusammenhang  $g \sim \frac{1}{r^2}$ . Die Fallbeschleunigung ist also indirekt proportional zum Quadrat des Abstandes zum Erdmittelpunkt.

**2.3 Hilfe:** Vergiss nicht, den Erdradius von km in m umzurechnen.

**Lösung:** Bei einer Seehöhe von 0 m beträgt der Abstand zum Erdmittelpunkt 6 370 000 m ( $6,37 \cdot 10^6$  m), bei einer Seehöhe von 1000 m beträgt er 6371000 m ( $6,371 \cdot 10^6$  m) und so weiter. Diese Zahlen sind in die Formel  $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$  einzusetzen. Das Ergebnis siehst du in Tabelle 3 und Abbildung 21.

**2.4 Lösung:** Tabelle 4 und Abbildung 22 zeigen das relative Absinken der Fallbeschleunigung. Bei einem Stratosphärensprung aus zum Beispiel 40 km Höhe ist die Fallbeschleunigung um etwa 1,3 % gesunken. In diesem Fall wäre eine Berücksichtigung eventuell sinnvoll, wenn man die ganze Fallstrecke bis zur Erdoberfläche berücksichtigt. Bei normalen Fallschirmsprüngen und erst recht bei Fallhöhen von wenigen Metern muss man aber die Änderung von  $g$  nicht berücksichtigen.

Seehöhe in m	$g$ in $m/s^2$	Höhe über Erdmittelpunkt in m
0	9,813	6 370 000
1000	9,810	6 371 000
2000	9,807	6 372 000
3000	9,804	6 373 000
4000	9,801	6 374 000
5000	9,798	6 375 000
10 000	9,783	6 380 000
15 000	9,767	6 385 000
20 000	9,752	6 390 000
25 000	9,737	6 395 000
30 000	9,722	6 400 000
35 000	9,706	6 405 000
40 000	9,691	6 410 000

TABELLE 3. Die Fallbeschleunigung in Abhängigkeit von der Seehöhe

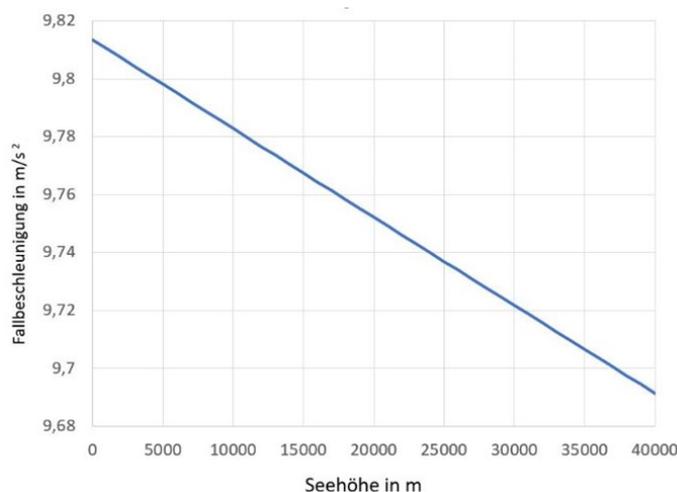


ABBILDUNG 21. Die Fallbeschleunigung in Abhängigkeit von der Seehöhe

**2.5 Lösung:** In einer Höhe von 320 km über der Erdoberfläche ist

$$r = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m} + 0,32 \cdot 10^6 \text{ m} = 6,69 \cdot 10^6 \text{ m}$$

Wenn man diesen Wert in die Formel  $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$  einsetzt, erhält man  $8,90 \text{ m/s}^2$  oder  $90,66 \%$ . In einer Höhe von 460 km ist  $r = 6,83 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Wenn man diesen Wert in die Formel einsetzt, erhält man  $8,54 \text{ m/s}^2$  oder rund  $87 \%$ . Die Fallbeschleunigung sinkt also maximal um  $13 \%$  ab. Die Schwerelosigkeit kommt also nicht dadurch zustande, dass die Gravitation auf null gesunken ist. Das kann sie ja auch gar nicht, weil sie unendlich weit wirkt. Die Schwerelosigkeit kommt durch den freien Fall der Raumstation um die Erde zustande. Dass man im freien Fall

Seehöhe in m	$g$ in %	$g$ in $m/s^2$	Höhe über Erdmittelpunkt in m
0	100,000	9,813	6 370 000
1000	99,969	9,810	6 371 000
2000	99,937	9,807	6 372 000
3000	99,906	9,804	6 373 000
4000	99,875	9,801	6 374 000
5000	99,843	9,798	6 375 000
10 000	99,687	9,783	6 380 000
15 000	99,531	9,767	6 385 000
20 000	99,375	9,752	6 390 000
25 000	99,220	9,737	6 395 000
30 000	99,065	9,722	6 400 000
35 000	98,910	9,706	6 405 000
40 000	98,756	9,691	6 410 000

TABELLE 4. Wie Tabelle 3, allerdings ist die Fallbeschleunigung hier zusätzlich auch relativ aufgetragen.

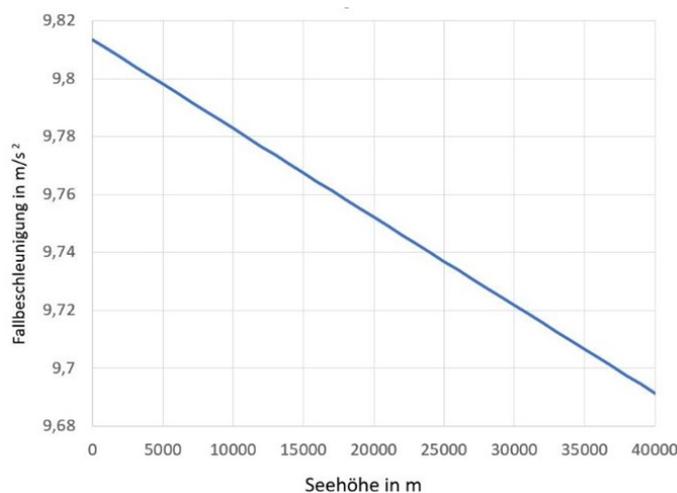


ABBILDUNG 22. Wie Abbildung 21, allerdings ist die Fallbeschleunigung hier relativ aufgetragen.

schwerelos ist, kann man durch das Äquivalenzprinzip erklären, eine der Grundannahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

3.1 Abbildung 23 und 24 zeigen die Dichte der Standardatmosphäre in Abhängigkeit von der Höhe.

Wenn die Luftdichte nur von der Seehöhe abhängen würde, müsste die Abnahme mit zunehmender Höhe exponentiell verlaufen. Zusätzlich ändert sich aber auch die Temperatur mit

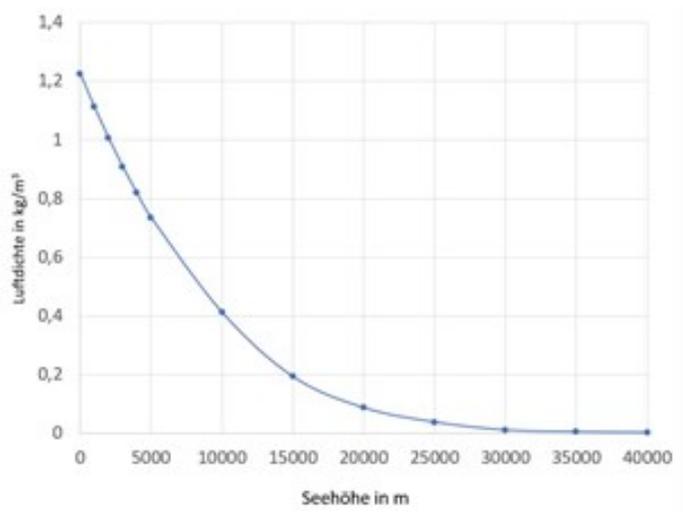


ABBILDUNG 23. Die Dichte der Standardatmosphäre in Abhängigkeit von der Seehöhe in normaler Darstellung.

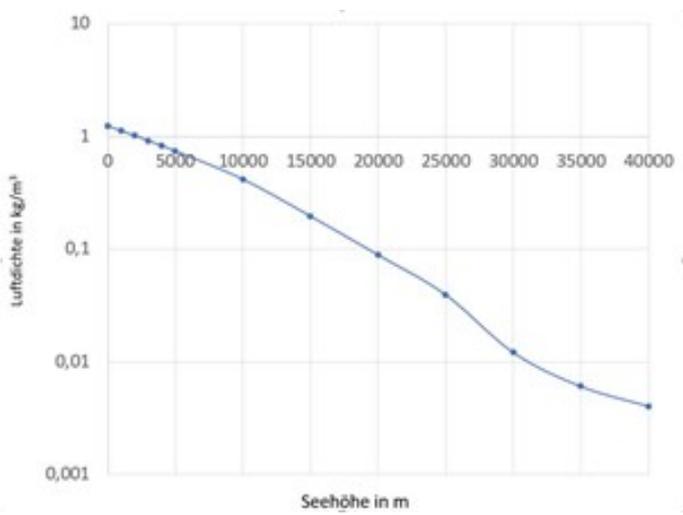


ABBILDUNG 24. Die Dichte der Standardatmosphäre in Abhängigkeit von der Seehöhe in logarithmischer Darstellung.

der Höhe, wodurch die Dichte ebenfalls beeinflusst wird. Deshalb verläuft der Zusammenhang nicht exponentiell, was man bei der logarithmischen Darstellung in Abbildung 24 am nichtlinearen Verlauf deutlich erkennen kann.

**3.2 Hilfe:** Wenn man außer der Dichte  $\rho$  alle anderen Werte inklusive der Fallbeschleunigung als konstant annimmt, dann erhält man

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_w \cdot A}} \sim \sqrt{1/\rho}$$

**Lösung:** Tabelle 1 kannst du entnehmen, dass in 30 000 m Höhe die Dichte auf rund 1% des Werts auf Meeresniveau abgesunken ist, also auf 1/100. Man erhält somit in diesen Höhen

eine 10 Mal höhere  $v_{max}$  als auf Meeresniveau. Deshalb ist es auch möglich, bei einem Stratosphärensprung die Schallgeschwindigkeit zu überschreiten.

**3.3 Lösung:** Auffällig ist natürlich zunächst einmal der große Unterschied in der  $v_{max}$ , der auf die unterschiedliche Luftdichte in den verschiedenen Höhen zurückzuführen ist (siehe Formel in 3.2 oben). Verbunden damit ist natürlich auch die unterschiedliche Beschleunigungsdauer. Während beim Sprung aus 3000 m Höhe die  $v_{max}$  bereits nach rund 10 s erreicht ist, dauert es bei 40 000 m Höhe etwa 50 s, wobei die Schallgeschwindigkeit von 340 m/s locker überschritten wird. (Anm.: Außerdem ist die Schallgeschwindigkeit aufgrund der niedrigen Temperaturen in dieser Höhe um einiges niedriger.) Die Verbindung zu 1.1 ist die, dass im Fall des Stratosphärensprungs die Geschwindigkeit zu Beginn wegen des beinahe fehlenden Luftwiderstandes praktisch wirklich linear anwächst. In beiden Fällen ist zu sehen, dass die Geschwindigkeit nach  $v_{max}$  wieder absinkt, weil sich der Springer in die immer dichter werdende Luft bewegt. Die untere Kurve bricht nach 70 s ab, weil dann der Springer bereits – unsanft – den Boden erreicht hätte.

**3.4 Hilfe:** Abbildung 25 und 26 zeigen die beiden unterschiedlichen Anpassungen inklusive Funktion und Bestimmtheitsmaß.

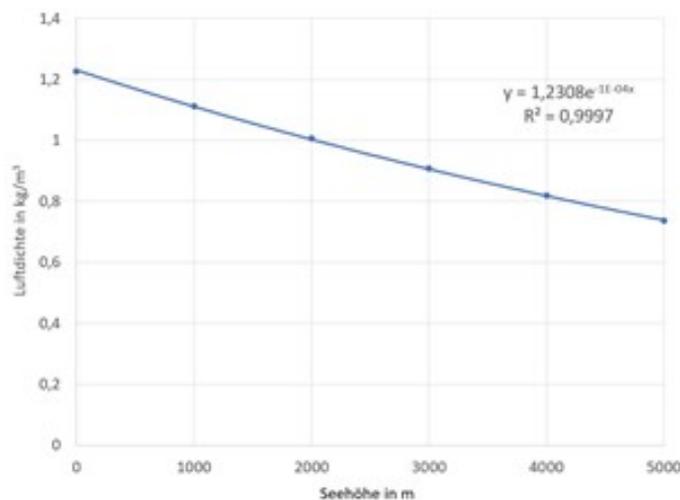


ABBILDUNG 25. Die Dichte der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Seehöhe bis 5000 m Höhe, angepasst durch eine Exponentialfunktion.

**Lösung:** Wie erwähnt, müsste die Dichte der Atmosphäre exponentiell abfallen, wenn sich die Temperatur mit zunehmender Höhe nicht ändern würde. Zwischen 0 m und 5000 m ist das beinahe der Fall. Das sieht man daran, dass das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  beinahe den Wert 1 hat. Aber auch eine lineare Anpassung liefert kaum schlechtere Ergebnisse, weshalb man für eine grobe Faustregel auch diese verwenden kann.

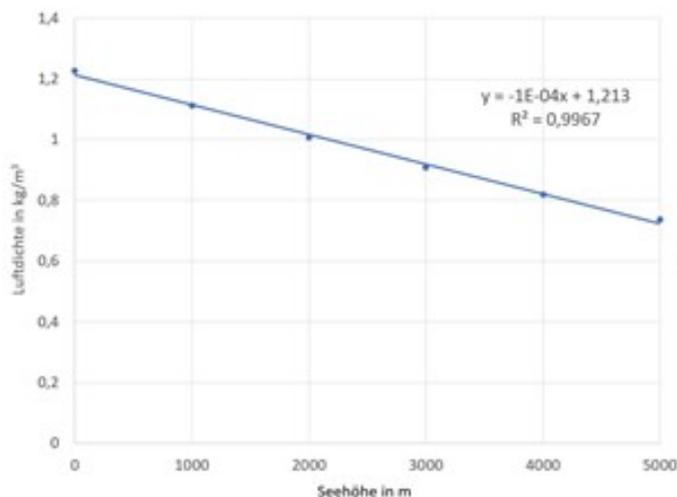


ABBILDUNG 26. Die Dichte der Atmosphäre in Abhängigkeit von der Seehöhe bis 5000 m Höhe, angepasst durch eine lineare Funktion.

**3.5 Hilfe:** Die an die Werte angepasste Gerade in Abbildung 26 hat die Form  $y = -10^{-4} \cdot x + 1,213$ .  $y$  ist dabei die Luftdichte in  $kg/m^3$  und  $x$  die Seehöhe in  $m$ . Die Luftdichte nimmt nach diesem vereinfachten Modell linear ab.

**Lösung:** Auf Meeresniveau beträgt die Luftdichte nach dieser Gleichung  $1,213 kg/m^3$ . Weil generell  $y = kx + d$  gilt, ist somit  $k = -10^{-4}$ . Als Faustregel kann man also sagen, dass die Dichte pro Meter um  $10^{-4} kg/m^3$  und pro 1000 m um  $10^{-1} kg/m^3$  abnimmt. Tabelle 5 zeigt, dass das zwar nicht exakt stimmt, aber einen sehr guten Anhaltspunkt gibt. Die Abweichung zwischen Faustregel und Standardatmosphäre beträgt maximal 3,1 %, bei Höhen bis 4000 m sogar maximal 1,1 %.

Höhe in m	$\rho$ in $kg/m^3$ Standardatm.	$\rho$ in $kg/m^3$ Faustregel	Fehler in %
0	1,226	1,213	-1,1
1000	1,112	1,113	0,1
2000	1,007	1,013	0,6
3000	0,909	0,913	0,4
4000	0,819	0,813	-0,7
5000	0,736	0,713	-3,1

TABELLE 5. Luftdichte laut Standardatmosphäre (2. Spalte) und laut Faustregel (3. Spalte), wobei der Wert für 0 m Höhe mit  $1,226 kg/m^3$  angenommen wurde.

**3.6 Lösung:** Bei einer Höhenzunahme von 100 m macht die Änderung nur  $-0,01 kg/m^3$  aus. Das ist ein sehr kleiner Wert. In den meisten Fällen, etwa wenn eine Katze vom Tisch oder ein Stein vom Hochhaus fällt, muss man die sich ändernde Luftdichte also nicht berücksichtigen.

Nur in besonderen Fällen, etwa bei einem Fallschirmsprung und natürlich einem Stratosphärensprung, ist es von Vorteil, die Änderungen in der Luftdichte zu beachten, damit man exakte Ergebnisse erhält.

- 4.1 Hilfe:** Als  $c_w$ -Wert für den Fallschirmspringer kannst du den Wert für eine stehende Person nehmen, also 0,78. Beim Fallschirmspringen ist die Situation gewissermaßen um  $90^\circ$  gedreht.

**Lösung:** Die Formel für die Maximalgeschwindigkeit lautet

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_w \cdot A}}$$

Wenn du die bekannten Werte einsetzt ( $m = 100 \text{ kg}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ ,  $\rho = 1,007 \text{ kg/m}^3$ ,  $A = 1 \text{ m}^2$ ), erhältst du einen Wert von etwa  $50 \text{ m/s}$  ( $180 \text{ km/h}$ ). Das ist auch der Wert, den man oft in der Literatur lesen kann.

- 4.2 Hilfe:** Es verändern sich der  $c_w$ -Wert und Anströmfläche  $A$ . Als  $c_w$ -Wert für den Fallschirm kann man den Wert für die Hohlkugel, die von der konkaven Seite angeströmt wird, nehmen, also 1,33.

**Lösung:** Zuerst qualitativ: Der  $c_w$ -Wert steigt von 0,78 auf 1,33, also ganz grob gesagt um einen Faktor 2. Durch diesen Effekt sinkt  $v_{max}$  daher um einen Faktor  $1/\sqrt{2} \approx 0,71$  ab. Ein Fallschirm hat aber eine Fläche von vielen Quadratmetern. Selbst wenn der Fallschirm nur  $9 \text{ m}^2$  hätte (er ist aber viel größer, wie die genauere Berechnung unten zeigt), würde sich dadurch  $v_{max}$  um einen Faktor  $1/\sqrt{9} = 1/3 \approx 0,33$  verringern. Der wichtigere Effekt ist also die Größe des Fallschirms. Nun quantitativ: Um die Fläche zu berechnen, verwende  $A = r^2 \cdot \pi$ , wobei  $r$  den Wert  $3,5 \text{ m}$  hat. Mit einem  $c_w$ -Wert von 1,33 und den anderen Werten aus 4.1 erhältst du für die Endgeschwindigkeit  $8,1 \text{ m/s}$  oder rund  $29 \text{ km/h}$ .

- 4.3 Hilfe:** Der Zusammenhang zwischen Aufprallgeschwindigkeit und Fallhöhe lautet  $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$ . Diese Gleichung gilt unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes, also für nur kleine Höhen.

**Lösung:** Wenn man umformt, erhält man  $h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$ . Wenn man  $v = 8,1 \text{ m/s}$  einsetzt, erhält man eine Höhe von  $3,3 \text{ m}$ . Wenn du aus dieser Höhe springst, erreichst du am Boden dieselbe Geschwindigkeit wie ein Fallschirmspringer bei der Landung. Das ist recht beachtlich und zeigt, dass die Sinkgeschwindigkeit immer noch beachtlich hoch ist.

- 4.4 Hilfe:** Gehe vereinfacht davon aus, dass der Hauptwiderstand durch den Schirm verursacht wird. Die Abschätzung ist dann dieselbe wie die in 4.2, lediglich Masse und Schirmfläche sind

neu einzuschätzen.

**Lösung:** Nehmen wir an, Mary Poppins hat eine Masse von 60 kg und der Schirm einen Durchmesser von 60 cm. Der Radius beträgt daher 0,3 m und die Schirmfläche  $0,28 \text{ m}^2$ . Wir nehmen weiters vereinfacht an, dass der gesamte Luftwiderstand durch den Schirm verursacht wird. Mit diesen Werten kommt man auf eine  $v_{max}$  von 66 m/s (237 km/h). Das zeigt, dass ganz eindeutig Magie im Spiel sein muss!

4.5 **Hilfe 1:** Gehe wieder von der Formel  $v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot c_w \cdot A}}$  aus. Weil alle fallenden Tropfen Kugelform haben, sind die Werte  $g$ ,  $\rho$  und  $c_w$  konstant und es gilt daher  $v_{max} \sim \sqrt{\frac{m}{a}}$ .

**Hilfe 2:** Masse und Anströmfläche sind nicht unabhängig voneinander, sondern hängen vom Radius des Tropfens ab.

**Lösung:** Das Volumen einer Kugel ist  $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3} \sim r^3$ . Für die Dichte gilt  $\rho = \frac{m}{V}$  und daher  $m = \rho \cdot V$ . Weil die Wasserdichte für alle Tropfen gleich ist, gilt daher  $m \sim V \sim r^3$ . Die Querschnitts- oder Schattenfläche berechnet sich durch  $A = r^2 \cdot \pi \sim r^2$ . Man kann daher auch schreiben  $v_{max} \sim \sqrt{\frac{m}{A}} \sim \sqrt{\frac{V}{A}} \sim \sqrt{\frac{r^3}{r^2}} \sim \sqrt{r}$ . Die Endgeschwindigkeit wächst also mit der Wurzel des Radius. Wenn sich der Radius verdoppelt, erhöht sich die Fallgeschwindigkeit um den Faktor 1,41, wenn sich der Radius vervierfacht, dann verdoppelt sich die Fallgeschwindigkeit und so weiter. Und dieser Zusammenhang führt dazu, dass große Tropfen eine wesentlich höhere Maximalgeschwindigkeit haben.

5.1 **Hilfe:** In Punkt 2 und 3 haben wir festgestellt, dass die Fallbeschleunigung  $g$  und die Luftdichte  $\rho$  als konstant angenommen werden können. Zu bestimmen sind also die Masse  $m$ , der  $c_w$ -Wert und die Schattenfläche  $A$ .

**Lösung:** Die Masse lässt sich leicht mit Hilfe einer Präzisionswaage messen. Die Schattenfläche kann über den Durchmesser eruiert werden, indem man vereinfacht annimmt, dass der Rand der Backformen kreisförmig und nicht gezackt ist (mehr dazu in 5.3). Bleibt schließlich der  $c_w$ -Wert über. Auf diesen kannst du rückschließen, wenn du die Fallgeschwindigkeit der Backformen im Experiment bestimmst und die Gleichung nach  $c_w$  umformst:

$$c_w = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot v_{max} \cdot A}$$

5.2 **Hilfe:** Einzelne Papierformen sind sehr leicht. Man kann die Messgenauigkeit erhöhen, indem man viele Förmchen gleichzeitig misst und die Masse durch die Anzahl dividiert.

**Lösung:** In unserem Experiment zeigt die Waage bei einer Form eine Masse von 0,4 g, bei 20 Formen 7,95 g, bei 40 Formen 15,92 g und bei 60 Formen 23,87 g. Durchgerechnet ergibt das 0,3975 g, 0,398 g und 0,3978 g. Man kann auch in einem Tabellenkalkulationsprogramm durch die Werte eine Gerade legen, um alle Messungen miteinzubeziehen (Abbildung 27). Runtergerechnet ergibt das in unserem Fall – mit einem kleinen „Restfehler“ von 0,0005 g – eine Masse von 0,3979 g. Wenn man es ganz genau haben will, dann sollte man also mit 0,398 g rechnen. Es erscheint allerdings gerechtfertigt, auf 0,4 g ( $0,4 \cdot 10^{-3}$  kg) aufzurunden, weil der Fehler nur 0,002 g (2/1000 g) oder 0,5 % beträgt. Sollte allerdings in deinem Experiment der Unterschied zwischen der Einzelmessung und der Mehrfachmessung größer sein, dann sollte besser der genauere Wert genommen werden.

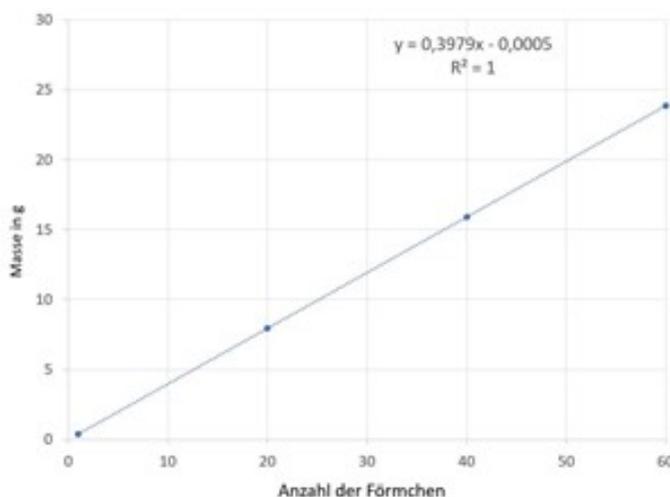


ABBILDUNG 27. Drei Messungen mit unterschiedlicher Anzahl an Förmchen und lineare Regression an die Werte.

**5.3 Hilfe:** Von Schattenfläche spricht man deshalb, weil sie der Fläche des Schattens entspricht, den das Objekt werfen würde, wenn es mit parallelem Licht in oder gegen Bewegungsrichtung beleuchtet wird.

**Lösung:** Die Förmchen laufen nach oben auseinander. Der oberen Rand ist also gleichzeitig auch der Außenrand der Schattenfläche. Um diese zu berechnen, kann man vereinfacht einnehmen, dass der Rand kreisförmig und ohne Zacken ist. Beim Messen des Durchmessers musst du aufpassen, dass du nicht auf den Rand der Form drückst, weil er dann auseinandergebogen und der Durchmesser größer als tatsächlich gemessen wird. In unserem Fall beträgt der Durchmesser von Außenzacke zu Außenzacke 6,8 cm und von Innenzacke zu Innenzacke 6,4 cm. Wir nehmen mit 6,6 cm (0,066 m) den Mittelwert. Der Radius beträgt dann also 0,033 m. Die Kreisfläche, die somit die Schattenfläche ist, kann dann mit  $A = r^2 \cdot \pi = 3,42 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  berechnet werden.

**5.4 Lösung:** In unserem Fall soll die Messstrecke 2,63 m sein und die durchschnittliche Fallzeit, eruiert aus 5 Fallversuchen, 1,50 s. Für  $v_{max} = \frac{s}{t}$  ergeben sich daher 1,75 m/s. Die Masse  $m$  haben wir in 5.2 mit 0,4 g, also mit  $0,4 \cdot 10^{-3}$  kg ermittelt, die Schattenfläche  $A$  in 5.3 mit  $3,42 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup>. Für die Luftdichte  $\rho$  nehmen wir den Wert der Standardatmosphäre aus Tabelle 1, nämlich 1,226 kg/m<sup>3</sup> und für die Fallbeschleunigung 9,81 m/s<sup>2</sup>. Wenn wir alles in die Gleichung

$$c_w = \frac{2 \cdot m \cdot g}{\rho \cdot v_{max} \cdot A}$$

aus 4.5 einsetzen, erhalten wir einen  $c_w$ -Wert von 1,07. Das ist deshalb keine große Überraschung, weil eine runde Scheibe nach Tabelle 2 einen  $c_w$ -Wert von 1,11 hat, also in einer vergleichbaren Größenordnung liegt.

**6.7 Hilfe:** Um ein Diagramm der Falltiefe über der Zeit zu erstellen, musst du nur die ersten beiden Spalten markieren, und zwar im Bereich von A10 bis B94. Nach dem Markieren gehst du auf Einfügen → Diagramme und wählst dort ein Punktdiagramm aus. Um ein Diagramm der Geschwindigkeit über der Zeit zu erstellen, musst du die erste und dritte Spalte markieren. Dazu markierst du zuerst A10 bis A94 und markierst dann bei gedrückter STRG-Taste noch zusätzlich C10 bis C94. Dann verfahrst du weiter wie oben beschrieben.

**Lösung:** Die beiden Graphen sind in Abbildung 28 und 29 dargestellt. Wenn du in der Excel-Tabelle nachsiehst, kannst du erkennen, dass die Geschwindigkeit nach 0,38 s in einer Höhe von etwa 60 cm über dem Boden (also nach einer Fallstrecke von 40 cm) einen Wert von 1,32 m/s erreicht. Beim Aufprall beträgt die Geschwindigkeit 1,326 m/s, hat sich also nur mehr in der 3. Nachkommastelle verändert. Man kann daher sagen, dass die  $v_{max}$  nach 40 cm erreicht wurde. Wenn du also die Backform 50 cm oberhalb der Markierung fallen lässt, bist du auf jeden Fall auf der sicheren Seite.

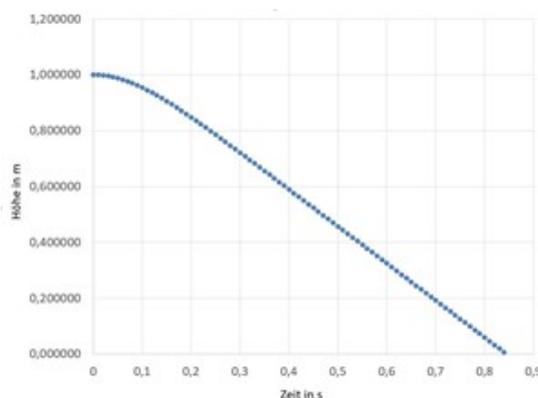


ABBILDUNG 28. Höhe über der Zeit...

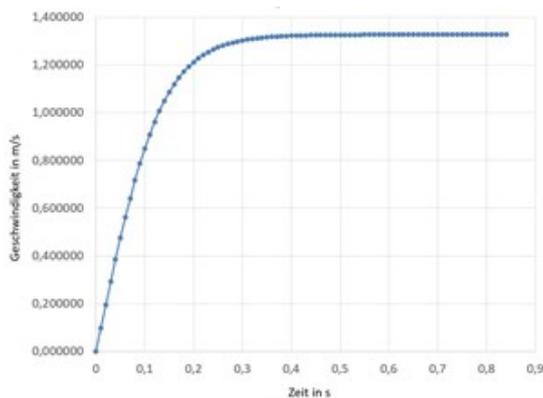


ABBILDUNG 29. ... und Geschwindigkeit über der Zeit

**6.8 Lösung:** In Abbildung 30 siehst du die Diagramme für  $\Delta t = 0,04\text{ s}$  und  $0,01\text{ s}$  übereinandergelegt. Du siehst, dass beim größeren Zeitintervall die Werte schneller ansteigen. Warum ist das so? Mit zunehmender Geschwindigkeit wächst die Luftwiderstandskraft, die das fallende Objekt bremst. Weil im Intervall  $\Delta t$  jedoch angenommen wird, dass die Kraft konstant bleibt, werden Luftwiderstandskraft und Abbremsung unterschätzt und somit vertikale Beschleunigung und Geschwindigkeit überschätzt. Deshalb liegt die Kurve mit dem größeren Intervall über der mit dem geringeren.

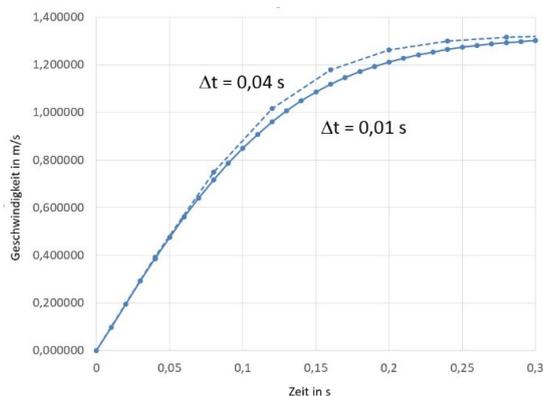


ABBILDUNG 30. Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für zwei verschiedene Zeitintervalle

Verringert man  $\Delta t$  auf  $0,005\text{ s}$ , dann ändert sich kaum mehr etwas am Kurvenverlauf. Optisch liege die beiden Kurven praktisch übereinander. Deshalb scheint es gerechtfertigt zu sein, ein Intervall von  $0,01\text{ s}$  zu verwenden. Die  $v_{max}$  wird in allen Fällen jedoch gleich groß, nur wird sie zu leicht unterschiedlichen Zeiten erreicht. Ganz streng genommen wird  $v_{max}$  eigentlich niemals erreicht, sondern die aktuelle Geschwindigkeit nähert sich asymptotisch  $v_{max}$  an. Im Realfall sind die Änderungen aber nach einer kurzen Zeit so minimal, dass man vom Erreichen der  $v_{max}$  sprechen kann.

6.9 Lösung: In Abbildung 31 und 32 siehst du die Lösungen. In Abbildung 32 ist sehr schön zu sehen, dass  $v_{max}$  absinkt, wenn der Springer in die immer dichtere Luft eintaucht.

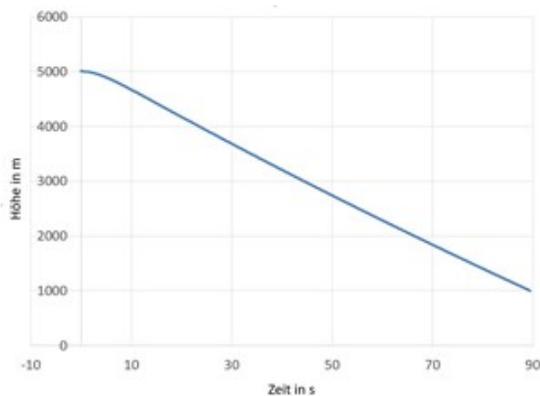


ABBILDUNG 31. Höhe über der Zeit...

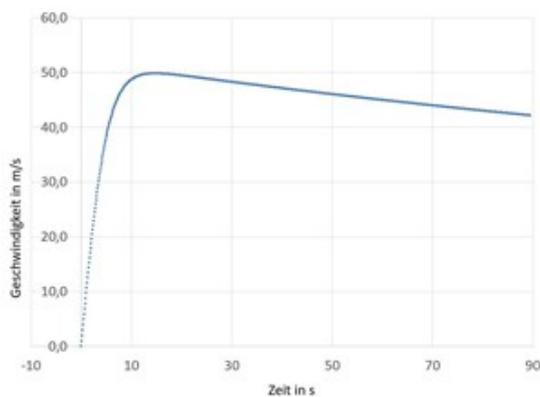


ABBILDUNG 32. ... und Geschwindigkeit über der Zeit