AUFGABENSAMMLUNG – QUADRATISCHE FUNKTIONEN & POLYNOMFUNKTIONEN

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Quadratische Funktionen & Polynomfunktionen

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Arbeitsblatt – Quadratische Funktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen
- ✓ Arbeitsblatt – Linearfaktorform
- ✓ Arbeitsblatt – Polynomfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Polynomdivision

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?

Das MmF-Team entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo MmF gekennzeichnet.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 3. April 2024

1. Quadratische Funktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Eigenschaften von Funktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Quadratische Funktionen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

An welcher Stelle x nimmt f den *kleinsten* Funktionswert an? Wie groß ist dieser Funktionswert?

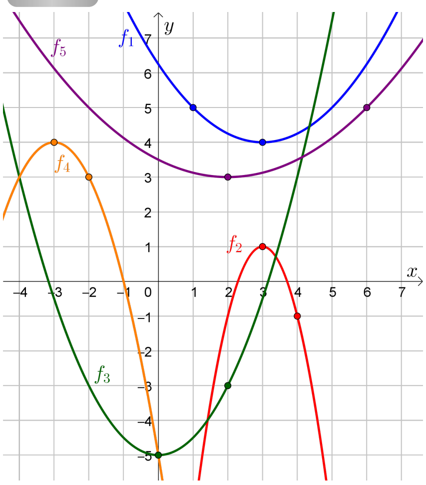
a) $f(x) = x^2 + 5$ **b)** $f(x) = (x-4)^2 + 3$ **c)** $f(x) = (x+1)^2 - 4$ **d)** $f(x) = 3 \cdot (x-5)^2 - 1$

1.2

Ermittle die Koordinaten des Scheitelpunktes von f.
Begründe, ob der Scheitelpunkt ein Tiefpunkt oder ein Hochpunkt von f ist.

a) $f(x) = -2 \cdot x^2 + 4$ **b)** $f(x) = 3 \cdot (x+1)^2 + 2$ **c)** $f(x) = (x+3)^2 - 1$ **d)** $f(x) = -(x-3)^2 - 2$

1.3



Links sind die Graphen von quadratischen Funktionen dargestellt.

a) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung in Scheitelpunktform:

$$f_i(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$

b) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung in Polynomform:

$$f_i(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

1.4

Die quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S = (4 \mid 7)$.
Ihr Funktionsgraph verläuft durch den Punkt $P = (-1 \mid -22)$.

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Polynomform.

1.5

Die quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S = (4 \mid 7)$ und eine Nullstelle bei $x = 2$.

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Polynomform.

1.6

Das qualitative Verhalten des Graphen der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

hängt von den Koeffizienten a, b und c ab. Ordne den fünf Eigenschaften der Koeffizienten jeweils die jedenfalls zutreffende Aussage A bis E über den Funktionsgraphen zu. Verwende jede Aussage genau einmal.

$a > 0$	
$a < 0$	
$c = 0$	
$a > 0,\ b = 0$	
$a < 0,\ b = 0$	

A	Der Graph hat den Tiefpunkt $(0 \mid c)$ auf der y-Achse.
B	Der Graph hat einen Tiefpunkt.
C	Der Graph verläuft durch den Punkt $(0 \mid 0)$.
D	Der Graph hat den Hochpunkt $(0 \mid c)$ auf der y-Achse.
E	Der Graph hat einen Hochpunkt.

1.7

Der Graph einer quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ verläuft durch die Punkte $A = (-1 \mid 6)$, $B = (2 \mid 3)$ und $C = (3 \mid 10)$.

a) Stelle ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten a, b und c auf.

b) Berechne die Koeffizienten a, b und c.

1.8

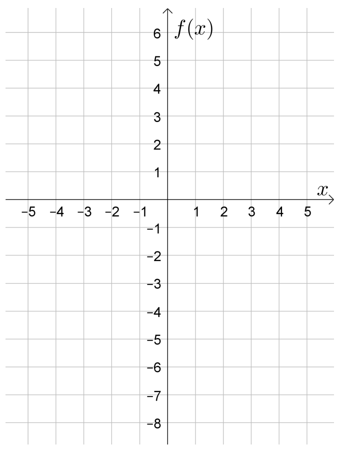
Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 8$

a) Ermittle den Scheitelpunkt und die Nullstellen von f.

b) Fülle die Wertetabelle aus.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$											

c) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f.



1.9 MmF

Die Flugkurve eines Schlagballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + b \cdot x + 2$$

$x \ldots$ horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
$h(x) \ldots$ Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

a) Aus welcher Höhe wird der Schlagball abgeworfen?

Der Schlagball trifft in 42 m horizontaler Entfernung von der Abwurfstelle am Boden auf.

b) Berechne b.

Die maximale Höhe erreicht der Schlagball im Scheitelpunkt $S = (x_S \mid y_S)$.

c) Gilt $x_S < 21\,\text{m}$, $x_S = 21\,\text{m}$ oder $x_S > 21\,\text{m}$? Begründe deine Antwort mithilfe einer Skizze.

1.10 ☆ MmF

Ermittle den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion durch Umformen in Scheitelpunktform.
Begründe, ob der Scheitelpunkt ein Hochpunkt oder ein Tiefpunkt ist.

a) $f(x) = x^2 + 4 \cdot x - 3$ **b)** $g(x) = -2 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 15$ **c)** $h(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2$

1.11 MmF

a) Die quadratische Funktion f mit $f(x) = (x - a)^2$ nimmt für $x = -1$ und $x = 9$ denselben Funktionswert an. Bestimme den Scheitelpunkt dieser Funktion.

b) Ermittle b so, dass die quadratische Funktion f mit $f(x) = (x - b)^2$ den Scheitelpunkt $S = (-2 \mid 0)$ hat.

c) Ermittle c und d so, dass der Graph der quadratischen Funktion f mit $f(x) = (x - c)^2 + d$ durch die Punkte $(-3 \mid 5)$ und $(5 \mid 5)$ verläuft.

1.12 MmF

Von einer Funktion f mit $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$ sind jeweils bestimmte Eigenschaften bekannt.
Gib die entsprechenden Bedingungen für a, x_S und y_S an.

a) Die Funktion nimmt nur positive Werte an. Der Graph ist nicht symmetrisch zur vertikalen Achse.

b) Die Funktion nimmt nur negative Werte an. Der Graph ist symmetrisch zur vertikalen Achse.

c) Die Funktion hat keine Nullstellen. Der Graph ist symmetrisch zur vertikalen Achse.

1.13 ☆ MmF

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 50$
Berechne den größten Funktionswert und den kleinsten Funktionswert von f …

a) … im Intervall $[3; 6]$. **b)** … im Intervall $[0; 2]$. **c)** … im Intervall $[4{,}2; 7]$.

1.14 MmF

Begründe, welche der Punkte

$$P_1 = (2 \mid 4),\ P_2 = (-2 \mid 4),\ P_3 = (-2 \mid -4),\ P_4 = (2 \mid -4)$$

nicht auf dem Graphen einer Funktion $f(x) = a \cdot x^2$ mit $a < 0$ liegen können.

1.15 MmF

Vervollständige die nachstehende Tabelle.

Funktionsgleichung	Scheitelpunkt	Art des Scheitels
$f(z) = -3 \cdot (z-2)^2 + 5$	$(2 \mid 5)$	Hochpunkt
$g(t) = -(t+7)^2 - 1$		
$h(s) = 8 \cdot (s-5)^2$		
$m(v) = -3 \cdot v^2 + 6$		
$q(d) = -4 \cdot (d-c)^2 + 1$		
$p(x) = t \cdot (x+u)^2 + w$ mit $t > 0$		

1.16 MmF

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot (x-v) \cdot (x-w)$

Der Funktionsgraph von f schneidet die *positive* vertikale Achse.

In der Tabelle sind mögliche Eigenschaften der Parameter a, v und w angegeben.

Welche davon können auf f zutreffen?

$a > 0$ und $v < w < 0$	☐
$a > 0$ und $v < 0 < w$	☐
$a > 0$ und $0 < v < w$	☐
$a < 0$ und $v < w < 0$	☐
$a < 0$ und $v < 0 < w$	☐

1.17 MmF

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -a \cdot x^2 + c$

a) In welchem Punkt schneidet der Graph der Funktion f die vertikale Achse?

b) Wenn $f(2) = b$ ist, dann ist $f(-2) = \boxed{}$.

c) Für welchen Wert von c hat die Funktion f genau eine Nullstelle?

1.18 MmF

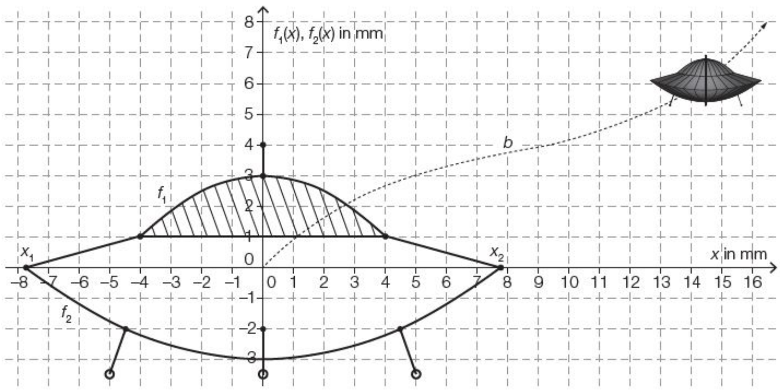
Die quadratische Funktion f hat den Scheitelpunkt $S = (1 \mid 2)$. Der Graph verläuft durch den Punkt $P = (0 \mid 4)$.

a) Begründe ohne Rechnung, warum die Funktion *keine* reelle Nullstelle haben kann.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

1.19

Für ein Computerspiel wurde ein einfaches UFO konstruiert.
Die nachstehende Abbildung zeigt eine Querschnittsfläche des UFOs. In dieser werden die Kuppel und der Unterbau durch die quadratischen Funktionen f_1 und f_2 modelliert.

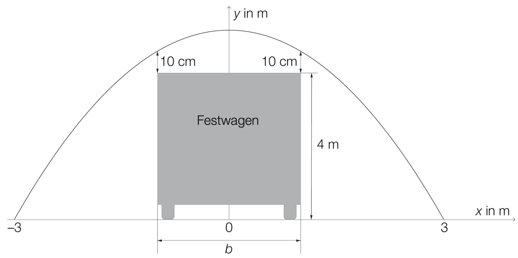


1) Stellen Sie mithilfe der Abbildung eine Funktionsgleichung von f_1 auf.

1.20

Ein kürzlich eröffneter Vergnügungspark ist ein beliebtes Ausflugsziel in der Region. Beim Eingang zum Vergnügungspark steht ein Torbogen. Dieser wird durch einen Teil des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung beschrieben:

$$y = 9 - x^2 \qquad x, y \ldots \text{Koordinaten in Metern (m)}$$



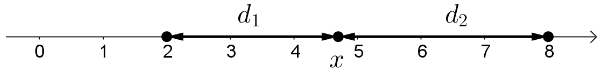
Dabei wird der ebene Boden durch die x-Achse beschrieben.
Bei einer Parade muss ein 4 Meter hoher Festwagen durch den Torbogen geschoben werden.
Nach oben hin muss ein senkrechter Minimalabstand von 10 cm eingehalten werden (siehe Skizze – nicht maßstabgetreu).

1) Berechnen Sie, welche Breite b der Festwagen maximal haben darf.

1.21

MmF

Es ist x eine beliebige Zahl im Intervall $[2; 8]$.
Der Abstand von x zu 2 ist d_1.
Der Abstand von x zu 8 ist d_2.



a) Für jede Zahl $x \in [2; 8]$ gilt: $d_1 + d_2 =$ ☐

b) Die Summe der *quadrierten* Abstände hängt aber von x ab.

Stelle mithilfe von x eine Formel auf: $d_1^2 + d_2^2 =$ ☐

c) ☆ Es gibt genau eine Zahl x, für die $d_1^2 + d_2^2$ kleinstmöglich ist. Berechne diese Zahl x.

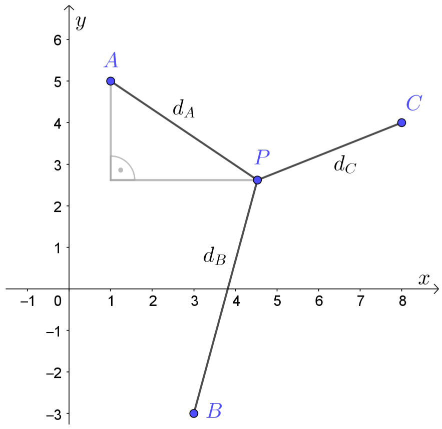
Hinweis: Multipliziere aus, vereinfache und ergänze quadratisch.

1.22

☆ MmF

Rechts unten sind die Punkte $A = (1 \mid 5)$, $B = (3 \mid -3)$ und $C = (8 \mid 4)$ eingezeichnet.

Der Punkt $P = (x \mid y)$ ist ein beliebiger Punkt in der Zahlenebene.
Der jeweilige Abstand von P zu den 3 Punkten ist d_A, d_B bzw. d_C.



a) Stelle jeweils mithilfe von x und y eine Formel auf:

$d_A =$ ☐

$d_B =$ ☐

$d_C =$ ☐

$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 =$ ☐

b) Es gibt genau einen Punkt $P = (x \mid y)$ in der Zahlenebene, für den $d_A^2 + d_B^2 + d_C^2$ kleinstmöglich ist. Berechne seine Koordinaten x und y.

Hinweis: Multipliziere aus, vereinfache und ergänze quadratisch nach x und nach y.

c) Zeige für $A = (x_A \mid y_A)$, $B = (x_B \mid y_B)$ und $C = (x_C \mid y_C)$ allgemein, dass der Schwerpunkt

$$S = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3} \mid \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

die Summe der quadratischen Abstände zu den 3 Punkten minimiert.

1.23

☆ MmF

Begründe, warum die folgende Ungleichung für alle Zahlen a, b und c stimmt:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 49 \geq 4 \cdot a - 6 \cdot b + 12 \cdot c$$

Für welche Zahlen a, b und c sind beide Seiten gleich groß?

1.1 **a)** $x = 0 \implies f(0) = 5$ **b)** $x = 4 \implies f(4) = 3$ **c)** $x = -1 \implies f(-1) = -4$ **d)** $x = 5 \implies f(5) = -1$

1.2 **a)** $(0 \mid 4)$ ist ein Hochpunkt, weil $a = -2 < 0$. **b)** $(-1 \mid 2)$ ist ein Tiefpunkt, weil $a = 3 > 0$.
c) $(-3 \mid -1)$ ist ein Tiefpunkt, weil $a = 1 > 0$. **d)** $(3 \mid -2)$ ist ein Hochpunkt, weil $a = -1 < 0$.

1.3 **a)** $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot (x-3)^2 + 4$ $f_2(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$ $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5$ $f_4(x) = -(x+3)^2 + 4$ $f_5(x) = \frac{1}{8} \cdot (x-2)^2 + 3$
b) $f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 - \frac{3}{2} \cdot x + \frac{25}{4}$ $f_2(x) = -2 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 17$ $f_3(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 5$ $f_4(x) = -x^2 - 6 \cdot x - 5$ $f_5(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{7}{2}$

1.4 **a)** $y = -3 \cdot (x-2)^2 + 5$ **b)** $y = -3 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 7$

1.5 **a)** $f(x) = -\frac{7}{4} \cdot (x-4)^2 + 7$ **b)** $f(x) = -\frac{7}{4} \cdot x^2 + 14 \cdot x - 21$

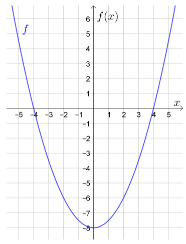
1.6 Von oben nach unten: B, E, C, A, D

1.7 **a)** $\text{I}: a - b + c = 6$ $\text{II}: 4 \cdot a + 2 \cdot b + c = 3$ $\text{III}: 9 \cdot a + 3 \cdot b + c = 10$ **b)** $a = 2$, $b = -3$, $c = 1$

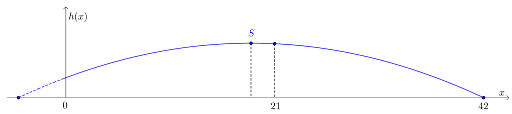
1.8 **a)** Scheitelpunkt: $(0 \mid -8)$ Nullstellen: $x_1 = -4$, $x_2 = 4$

b)

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4,5	0	$-3{,}5$	-6	$-7{,}5$	-8	$-7{,}5$	-6	$-3{,}5$	0	4,5

c) 

1.9 **a)** 2 m **b)** $b = 0{,}3723...$ **c)** $x_S < 21$ m



Mögliche Begründung: Wegen der Symmetrie liegt x_S genau in der Mitte zwischen den beiden Nullstellen. Bei der Abwurfhöhe 0 m würde $x_S = 21$ m gelten. Aber der Schlagball wird überhalb des Bodens abgeworfen. Deshalb gilt $x_S < 21$ m.

1.10 **a)** Tiefpunkt $(-2 \mid -7)$, weil $a = 1 > 0$ **b)** Hochpunkt $(-4 \mid 17)$, weil $a = -2 < 0$ **c)** Tiefpunkt $\left(\frac{4}{3} \mid -\frac{10}{3}\right)$, weil $a = 3 > 0$

1.11 **a)** $S = (4 \mid 0)$ **b)** $b = -2$ **c)** $c = 1$, $d = -11$

1.12 **a)** $a > 0$ $x_S \neq 0$ $y_S > 0$
b) $a < 0$ $x_S = 0$ $y_S < 0$
c) $a > 0$ $x_S = 0$ $y_S > 0$ oder $a < 0$ $x_S = 0$ $y_S < 0$

1.13 **a)** Kleinster Funktionswert: 2 Größter Funktionswert: 14
b) Kleinster Funktionswert: 14 Größter Funktionswert: 50
c) Kleinster Funktionswert: 2,12 Größter Funktionswert: 29

1.14 Der Scheitelpunkt einer solchen quadratischen Funktion ist $S = (0 \mid 0)$.
Wegen $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet. Die Funktionswerte können also *nicht* positiv sein.
Die Punkte P_1 und P_2 können damit nicht auf dem Graphen liegen.

1.15

Funktionsgleichung	Scheitelpunkt	Art des Scheitels
$f(z) = -3 \cdot (z-2)^2 + 5$	$(2 \mid 5)$	Hochpunkt
$g(t) = -(t+7)^2 - 1$	$(-7 \mid -1)$	Hochpunkt
$h(s) = 8 \cdot (s-5)^2$	$(5 \mid 0)$	Tiefpunkt
$m(v) = -3 \cdot v^2 + 6$	$(0 \mid 6)$	Hochpunkt
$q(d) = -4 \cdot (d-c)^2 + 1$	$(c \mid 1)$	Hochpunkt
$p(x) = t \cdot (x+u)^2 + w$, mit $t > 0$	$(-u \mid w)$	Tiefpunkt

1.16 von oben nach unten: 1.Antwort, 3.Antwort, 5.Antwort

1.17 **a)** $(0 \mid c)$ **b)** $f(-2) = b$ **c)** $c = 0$

1.18 **a)** Der Scheitelpunkt ist ein Tiefpunkt, weil $y_P = 4 > 2 = y_S$. Also nimmt f keinen Funktionswert an, der kleiner als 2 ist.
Damit hat f *keine* Nullstelle.
b) $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 + 2$

1.19 $f_1(x) = -\dfrac{1}{8} \cdot x^2 + 3$

1.20 Der Festwagen darf rund 4,42 m breit sein.

1.21 **a)** $d_1 + d_2 = 6$ **b)** $d_1^2 + d_2^2 = (x-2)^2 + (8-x)^2$ **c)** $x = 5$

1.22 **a)** $d_A = \sqrt{(x-1)^2 + (5-y)^2}$ $d_B = \sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2}$ $d_C = \sqrt{(8-x)^2 + (4-y)^2}$

$d_A^2 + d_B^2 + d_C^2 = (x-1)^2 + (5-y)^2 + (x-3)^2 + (y+3)^2 + (8-x)^2 + (4-y)^2$

b) $P = (4 \mid 2)$

1.23 Hinweis: Alle Terme auf die linke Seite bringen und quadratisch ergänzen. $a = 2$, $b = -3$, $c = 6$

2. Quadratische Gleichungen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.

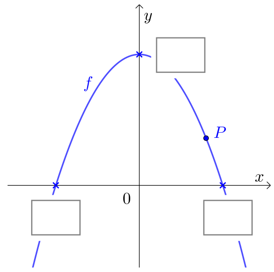
a) $x^2 = 25$ **b)** $2 \cdot x^2 - 128 = 0$ **c)** $\dfrac{3 \cdot x^2}{8} = 6$ **d)** $(x+3)^2 = 6 \cdot x + 13$ **e)** $x^2 = -16$

2.2

Für die rechts dargestellte quadratische Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot x^2 + 25$
Der Punkt $P = (4 \mid 9)$ liegt am Funktionsgraphen.

a) Berechne den Parameter a.

b) Ermittle die Schnittstellen mit den Koordinatenachsen.
Trage die richtigen Zahlen rechts in die Kästchen ein.



2.3

Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.

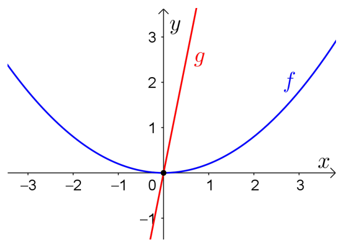
a) $x^2 + 3 \cdot x = 0$ **b)** $x^2 = 8 \cdot x$ **c)** $(x-2)^2 = 2 \cdot x + 4$

2.4

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 5 \cdot x$$

sind rechts dargestellt.



Es gilt: $f(0) = g(0) = \square$

Die Funktionsgraphen schneiden einander also im Punkt $(0 \mid 0)$.

Da quadratisches Wachstum schneller als lineares Wachstum ist, schneiden diese beiden Funktionsgraphen einander in einem weiteren Punkt S. Berechne diesen zweiten Schnittpunkt S.

2.5

Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.

a) $(x+3)^2 = 25$ **b)** $(x-4)^2 = 9$ **c)** $(x+5)^2 - 4 = 0$ **d)** $(x+2)^2 + 16 = 0$

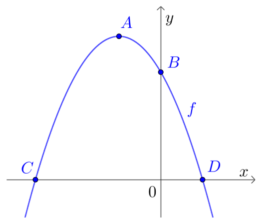
2.6

Die quadratische Funktion f ist in Scheitelpunktform gegeben:

$$f(x) = -2 \cdot (x+1)^2 + 8$$

Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

Berechne die markierten Punkte A, B, C und D *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.



2.7

Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ *ohne* Verwendung der Lösungsformeln.

a) $x^2 + 4 \cdot x - 21 = 0$ **b)** $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x = 42$ **c)** $x^2 = 10 \cdot x - 25$

Hinweis: Quadratische Ergänzung

2.8

Löse die quadratische Gleichung

a) $-2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 30 = 0$ **b)** $4 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 6 = 0$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ mit … **1)** … der großen Lösungsformel. **2)** … der kleinen Lösungsformel.

2.9

Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^2 - x - 12 = 0$ **b)** $2 \cdot x^2 = 3 \cdot x + 5$ **c)** $4 \cdot x^2 + 21 = 20 \cdot x$ **d)** $(x+12)^2 - 42 = 176 - (x-8)^2$

2.10

Forme die quadratische Gleichung in die Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ um.
Trage richtige Werte für a, b und c in die Kästchen ein. Löse die quadratische Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $0{,}042 \cdot x^2 + 2{,}3 \cdot x = 31{,}4$	$a =$ ☐	$b =$ ☐	$c =$ ☐
b) $\dfrac{3-x}{x-1} = \dfrac{5 \cdot x}{3 - 2 \cdot x}$	$a =$ ☐	$b =$ ☐	$c =$ ☐
c) $12 \cdot x^2 = 4 \cdot x - 2024$	$a =$ ☐	$b =$ ☐	$c =$ ☐

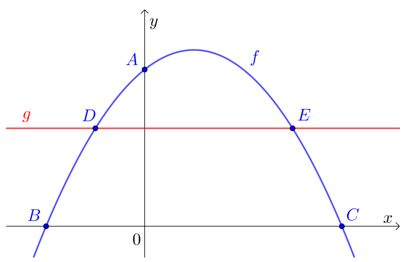
2.11

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = -x^2 + 2 \cdot x + 8 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 5$$

sind rechts dargestellt.

Berechne die Koordinaten der markierten Punkte A, B, C, D und E.

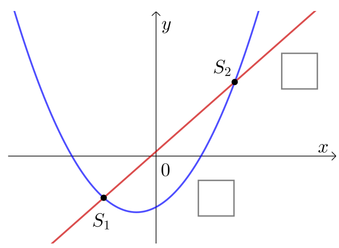


2.12

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 5 \cdot x + 1 \quad \text{bzw.} \quad g(x) = 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 11$$

sind rechts dargestellt.



a) Beschrifte die Funktionsgraphen mit f bzw. g.

b) Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2.

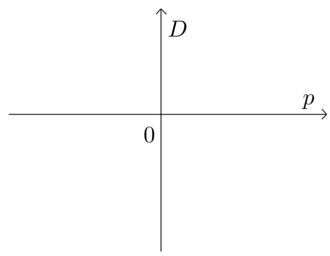
2.13

Die Anzahl der reellen Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + 4 = 0$ hängt von $p \in \mathbb{R}$ ab.

a) Stelle mithilfe von p eine Formel für die Diskriminante D in der kleinen Lösungsformel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ auf.

$D =$

b) Die Diskriminante D hängt von p ab. Skizziere rechts im Koordinatensystem den Graphen dieser Funktion.



c) Für welche Werte $p \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung also ...

i) ... genau eine reelle Lösung?

ii) ... keine reellen Lösungen?

iii) ... zwei reelle Lösungen?

2.14

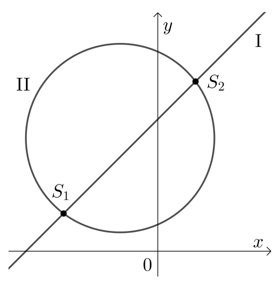
Für welche Werte von k hat die gegebene Gleichung genau eine reelle Lösung?

$$x^2 + 2 \cdot k \cdot x - (10 \cdot k + 9) = 0$$

2.15

Rechts sind eine Gerade (I) und ein Kreis (II) dargestellt. Dabei gilt:

$$\text{I}: \; x - y = -7$$
$$\text{II}: \; (x+2)^2 + (y-6)^2 = 25$$



Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

Hinweis: Verwende das Einsetzungsverfahren, um das Gleichungssystem zu lösen.

2.16

Stelle eine passende Gleichung auf und löse sie.

a) Die Quadratwurzel welcher positiven Zahl ist gleich dem 10-fachen der Zahl?

b) Welche natürliche Zahl ist um 30 kleiner als ihr Quadrat?

c) Welche ungerade Zahl ist um 6 kleiner als ihr Quadrat?

2.17

Zur schnelleren Auswertung von PCR-Tests kann ein sogenannter *Pool-Test* sinnvoll sein. Dabei wird zum Testen von k Proben jeweils ein Teil der Flüssigkeit entnommen und zu einer Probe gemischt ($k \geq 2$).

- Wenn alle k Proben negativ sind, dann liefert auch die Mischung ein negatives Ergebnis. In diesem Fall ist also statt k Tests nur 1 Test notwendig, um alle Proben als negativ auszuwerten.
- Wenn mindestens eine der k Proben positiv ist, dann liefert auch die Mischung ein positives Ergebnis. Dann werden die k Proben nochmal einzeln getestet, um alle positiven Proben herauszufinden. In diesem Fall sind also statt k Tests insgesamt $(k+1)$ Tests notwendig, um alle Proben auszuwerten.

Ob ein Pool-Test besser als Einzeltests ist, hängt von der Wahrscheinlichkeit p ab, dass eine Probe positiv ist:

– Bei $p = 0\,\%$ ist ein Pool-Test *sicher* besser als Einzeltests, weil dann *sicher* nur 1 Test statt k Tests notwendig ist.

– Bei $p = 100\,\%$ ist ein Pool-Test *sicher* schlechter als Einzeltests, weil dann *sicher* $(k+1)$ Tests statt k Tests notwendig sind.

– Wenn $0 < p < 1$ gilt, dann ist im Nachhinein klar, ob ein Pool-Test besser oder schlechter gewesen wäre. Bereits im Vorhinein kann man aber berechnen, wie viele Tests man *durchschnittlich* erwarten sollte.

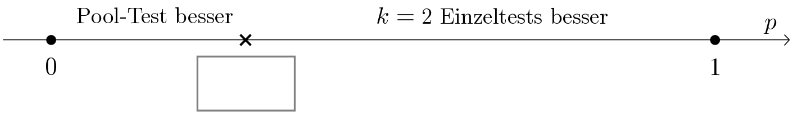
Für die zu erwartende Anzahl E von Tests bei einem Pool-Test mit k Proben kann man nämlich zeigen:

$$E = (1-p)^k + [1-(1-p)^k] \cdot (k+1)$$

Es ist $(1-p)^k$ die Wahrscheinlichkeit, dass alle k Proben negativ sind und damit nur 1 Test notwendig ist.

Es ist $1-(1-p)^k$ die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der k Proben positiv ist und damit $(k+1)$ Tests notwendig sind.

Bei welcher Wahrscheinlichkeit p ist ein Pool-Test mit $k = 2$ Proben durchschnittlich gleich gut wie 2 Einzeltests?
Das heißt: Wie groß muss p sein, damit beim Pool-Test erwartungsgemäß 2 Tests notwendig sind?
Berechne den Wert und trage ihn in das Kästchen am Zahlenstrahl ein:



2.18

a) In einem Quadrat mit der Seitenlänge 84 cm werden die Längen eines Parallelseitenpaares jeweils um a cm verlängert und die Längen des anderen Parallelseitenpaares um jeweils a cm verkürzt. Dabei entsteht ein Rechteck, dessen Flächeninhalt um 256 cm^2 kleiner ist als der Flächeninhalt des ursprünglichen Quadrats. Berechne den Flächeninhalt des neu entstandenen Rechtecks.

b) In einem rechtwinkeligen Dreieck mit einem Flächeninhalt von 270 cm^2 unterscheiden sich die beiden Kathetenlängen um 21 cm. Bestimme den Umfang des Dreiecks.

2.19

Ein Fernseher hat das 16 : 9 - Format. Die Länge und Breite des Bildschirms stehen also im Verhältnis 16 : 9.

Welche Länge und Breite in cm hat der Bildschirm, wenn die Diagonale 60 Zoll lang ist? (1 Zoll ≈ 2,54 cm)

2.20

a) Die Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist 4513.
Berechne das Produkt der beiden Zahlen.

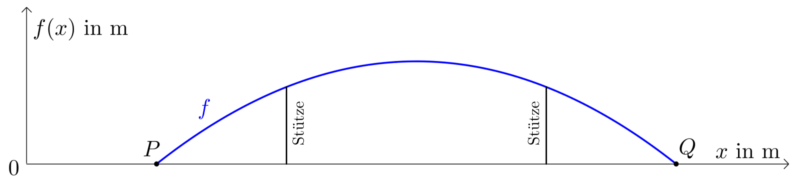
b) Zwei natürliche Zahlen unterscheiden sich um 44. Das Produkt der beiden Zahlen ist um 5444 größer als die Summe dieser Zahlen. Berechne die beiden Zahlen.

2.21

Der Verlauf einer parabelförmigen Brücke wird durch den Graphen der quadratischen Funktion f modelliert.
Dabei gilt:

$$f(x) = -0{,}06 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x - 7{,}5$$

$x\ldots$ horizontale Position in m
$f(x)\ldots$ Höhe der Brücke in m



a) Berechne den Abstand der beiden Punkte P und Q am Boden.

b) Berechne die (maximale) Höhe der Brücke.

c) Die beiden Stützen sind jeweils 5 Meter vom Mittelpunkt der Brücke entfernt.
Berechne die Höhe der beiden Stützen.

2.22

Ein Ball wird zum Zeitpunkt $t = 0$ senkrecht nach oben geschossen.
Die Höhe des Balls in Abhängigkeit von der vergangenen Zeit wird durch die folgende Funktion h modelliert:

$$h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + h_0,$$

$t\ldots$ Zeit in Sekunden
$h(t)\ldots$ Höhe in m zum Zeitpunkt t
$h_0\ldots$ Abschusshöhe in m über dem Boden
$v_0\ldots$ Anfangsgeschwindigkeit in m/s
$g \approx 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}\ldots$ Erdbeschleunigung

Du wirfst einen Ball aus 2 m Höhe über dem Boden mit Anfangsgeschwindigkeit 10 m/s senkrecht nach oben.

a) Wie lang dauert es, bis der Ball am Boden aufprallt?

b) Welche maximale Höhe erreicht der Ball?

2.23

Die Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391 \qquad \text{mit } 5 \le v \le 10$$

$v\ldots$ Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v)\ldots$ Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

1) Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.

2.24

Der Kehrwert der um 1 vermehrten Zahl ist gleich dem um 1 vermehrten Kehrwert der Zahl.
Gibt es eine reelle Zahl, die diese Bedingung erfüllt? Falls ja, berechne sie. Falls nein, begründe warum.

2.25

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Eisenbahnstrecke hat eine Länge von 200 km.
Die Züge fahren dabei – vereinfacht betrachtet – mit konstanter Geschwindigkeit.
Nach einer Sanierung der Gleise können die Züge mit einer um 10 km/h höheren Geschwindigkeit fahren. Die Fahrzeit wird dadurch um eine halbe Stunde vermindert.
Zur Verdeutlichung sind die Angaben in der nachstehenden Tabelle dargestellt.
t ist dabei die Fahrzeit vor der Sanierung in Stunden.

	Streckenlänge in km	Geschwindigkeit in km/h	Fahrzeit in h
nach der Sanierung	200	$\left(\frac{200}{t} + 10\right)$	$\left(t - \frac{1}{2}\right)$

1) Berechnen Sie t.

2.26

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für ein Produkt lautet die quadratische Kostenfunktion wie folgt:

$$K(x) = 0{,}1 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 40$$

$x \ldots$ erzeugte Menge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x) \ldots$ Gesamtkosten von x Mengeneinheiten in Geldeinheiten (GE)

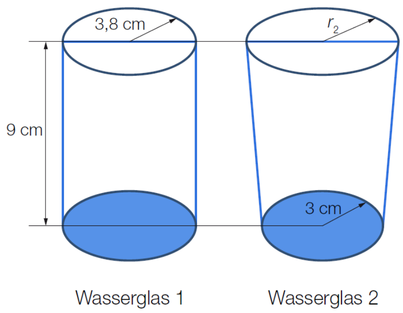
1) Ermitteln Sie, wie hoch die Kosten für die Produktion von 10 ME sind.

2) Ermitteln Sie aus der gegebenen Gleichung, wie viele ME produziert wurden, wenn Kosten von 150 GE angefallen sind.

2.27

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Skizze sind die inneren Formen von zwei verschiedenen Wassergläsern mit gleicher Höhe und gleichem Volumen abgebildet.

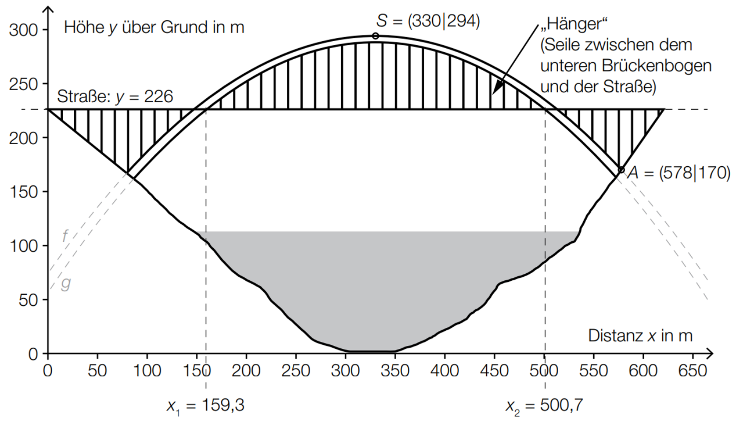


$V_1 = 3{,}8^2 \cdot 9 \cdot \pi$
$V_2 = 3 \cdot \pi \cdot (r_2^2 + 3 \cdot r_2 + 9)$
V_1, $V_2 \ldots$ Volumen des Wasserglases 1 bzw. 2 in cm^3

1) Berechnen Sie den Radius r_2 von Wasserglas 2.

2.28

Die Wushan-Brücke über den Jangtsekiang ist eine der größten Bogenbrücken der Welt:



Die obige Abbildung stellt die Geometrie der Brücke dar. Der obere und der untere Brückenbogen werden durch die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt. Der Punkt S ist der Scheitelpunkt der Funktion f. Die Stellen x_1 und x_2 markieren die Schnittpunkte des unteren Brückenbogens mit der Straße $y = 226$.

a) 1) Erstellen Sie mithilfe der Punkte A und S eine Gleichung der Funktion f.

b) Die Gleichung derjenigen Parabel, die den unteren Brückenbogen beschreibt, lautet:

$$g(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x - 330)^2 + 288 \qquad \text{mit } \ 86 \leq x \leq 574$$

Jemand stellt zur Berechnung der Höhe $H(x)$ der Hänger an der Stelle x folgende Formel auf:

$$H(x) = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760) \qquad \text{für } \ x_1 \leq x \leq x_2$$

1) Weisen Sie die Korrektheit dieser Formel nach.

c) Wirft man einen Stein mit einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 5\,\text{m/s}$ von der Brücke senkrecht nach unten, so kann man, wenn der Luftwiderstand vernachlässigt wird, die Höhe (über Grund) des Steins näherungsweise folgendermaßen berechnen:

$$h(t) = 226 - \frac{g}{2} \cdot t^2 - 5 \cdot t$$

t ... Zeit in s
$h(t)$ ... Höhe des Steins über Grund zur Zeit t in m
g ... Erdbeschleunigung ($g \approx 9{,}81\,\text{m/s}^2$)

1) Berechnen Sie diejenige Zeit t_a, die der Stein bis zum Aufprall auf die Wasseroberfläche benötigt, wenn der Wasserstand 113 m über Grund beträgt.

2.1 **a)** $L = \{-5; 5\}$ **b)** $L = \{-8; 8\}$ **c)** $L = \{-4; 4\}$ **d)** $L = \{-2; 2\}$ **e)** $L = \{\}$

2.2 **a)** $a = -1$ **b)** x-Achse: -5 und 5 y-Achse: 25

2.3 **a)** $L = \{0; -3\}$ **b)** $L = \{0; 8\}$ **c)** $L = \{0; 6\}$

2.4 $f(0) = g(0) = 0$ $(25 \mid 125)$.

2.5 **a)** $L = \{-8; 2\}$ **b)** $L = \{1; 7\}$ **c)** $L = \{-7; -3\}$ **d)** $L = \{\}$

2.6 $A = (-1 \mid 8)$ $B = (0 \mid 4)$ $C = (-3 \mid 0)$ $D = (1 \mid 0)$

2.7 **a)** $L = \{-7; 3\}$ **b)** $L = \{-3; 7\}$ **c)** $L = \{5\}$

2.8 **a)** $L = \{-3; 5\}$ **b)** $L = \{-\frac{1}{2}; 3\}$

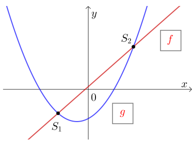
2.9 **a)** $L = \{-3; 4\}$ **b)** $L = \{-1; \frac{5}{2}\}$ **c)** $L = \{\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\}$ **d)** $L = \{-5; 1\}$

2.10 **a)** $L = \{-66{,}07\ldots; 11{,}31\ldots\}$ $a = 0{,}042,\ b = 2{,}3,\ c = -31{,}4$ (oder alle Vorzeichen umgekehrt / mit Konstante multipliziert)

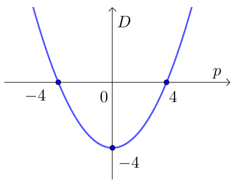
b) $L = \{-2{,}522\ldots; 1{,}189\ldots\}$ $a = 3,\ b = 4,\ c = -9$ (oder alle Vorzeichen umgekehrt / mit Konstante multipliziert)

c) $L = \{\}$ $a = 12,\ b = -4,\ c = 2024$ (oder alle Vorzeichen umgekehrt / mit Konstante multipliziert)

2.11 $A = (0 \mid 8)$ $B = (-2 \mid 0)$ $C = (4 \mid 0)$ $D = (-1 \mid 5)$ $E = (3 \mid 5)$

2.12 **a)** 

b) $S_1 = (-2 \mid -9)$ $S_2 = (3 \mid 16)$

2.13 **a)** $D = \frac{p^2}{4} - 4$ **b)** 

c) **i)** $p = \pm 4$ **ii)** $-4 < p < 4$ **iii)** $p > 4$ bzw. $p < -4$

2.14 $k = -9$ und $k = -1$

2.15 $S_1 = (-5 \mid 2),\ S_2 = (2 \mid 9)$

2.16 **a)** $\sqrt{x} = 10 \cdot x \implies x = \frac{1}{100}$ **b)** $x + 30 = x^2 \implies x_1 = 6$ $(x_2 = -5)$ **c)** $x + 6 = x^2 \implies x_1 = 3$ $(x_2 = -2)$

2.17 $p = 29{,}28\ldots\,\%$

2.18 **a)** $A = 6800\,\text{cm}^2$ **b)** $u = 90\,\text{cm}$

2.19 Länge: 132,82... cm Breite: 74,71... cm

2.20 **a)** 2256 **b)** 56 und 100

2.21 **a)** 20 m **b)** 6 m **c)** 4,5 m

2.22 **a)** 2,22... s **b)** 7,09... m

2.23 7,887... m/s

2.24 Nein. (Die quadratische Gleichung $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reellen Lösungen.)

2.25 $t = 3{,}422\ldots\,\text{h}$

2.26 Die Herstellung von 10 ME kostet 110 GE. Bei Kosten von 150 GE werden rund 14,72 ME erzeugt.

2.27 $r_2 = 4{,}547\ldots\,\text{cm}$

2.28 **a)** $f(x) = -\frac{1}{496} \cdot (x - 330)^2 + 294$ oder: $f(x) = -\frac{1}{496} \cdot x^2 + \frac{165}{124} \cdot x + \frac{9231}{124}$

b) $H(x) = g(x) - 226 = \cdots = -\frac{1}{470} \cdot (x^2 - 660 \cdot x + 79\,760)$ (Anwendung der binomischen Formel und Vereinfachung)

c) $t_a = 4{,}317\ldots\,\text{s}$

3. Linearfaktorform

MmF-Materialien

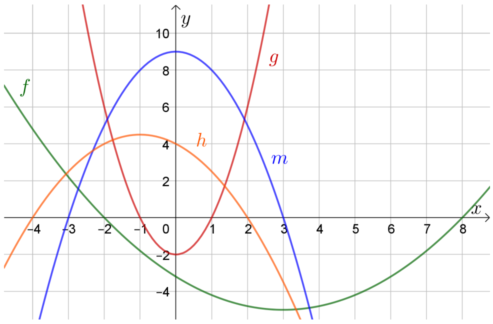
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Linearfaktorform

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

Im Folgenden sind die Graphen zu verschiedenen quadratischen Funktionen dargestellt.
Ordne den Funktionen jeweils die zugehörige Gleichung in Linearfaktorform zu.



- ☐ $0{,}2 \cdot (x-8) \cdot (x+2)$
- ☐ $2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)$
- ☐ $-0{,}5 \cdot (x-2) \cdot (x+4)$
- ☐ $-(x-3) \cdot (x+3)$

3.2

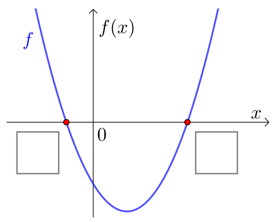
Der Graph der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 - 15 \cdot x - 42$ ist rechts unten dargestellt.

a) Berechne die Nullstellen von f, und trage sie rechts in die Kästchen ein.

b) Trage unten positive Zahlen so in die Kästchen ein, dass

$$f(x) = \square \cdot \left(x + \square\right) \cdot \left(x - \square\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Hinweis: Beachte die Nullstellen und den Koeffizienten von x^2.



3.3

Die quadratische Funktion f hat die Nullstellen -4 und 2.
Ihr Graph schneidet die vertikale Achse im Punkt $(0 \mid -16)$.

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Linearfaktorform.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

c) Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Polynomform.

3.4

Ermittle eine Funktionsgleichung von f in Linearfaktorform.

a) $f(x) = 5 \cdot x^2 - 3 \cdot x$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x$ **c)** $f(x) = x^2 + 2 \cdot x + 1$

3.5

Michael soll die Lösungen x_1 und x_2 der quadratischen Gleichung $x^2 - 2 \cdot x - 15 = 0$ ermitteln.

Dafür zerlegt er die linke Seite in Linearfaktoren:

$$x^2 - 2 \cdot x - 15 = (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

a) Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein:

$x_1 \cdot x_2 =$ ______ $\qquad x_1 + x_2 =$ ______

b) Ermittle die beiden ganzzahligen Lösungen x_1 und x_2.

3.6

a) Die quadratische Gleichung $x^2 + 4 \cdot x + u = 0$ hat die Lösung $x_1 = 3$.
Ermittle u und die zweite Lösung der Gleichung.

b) Die quadratische Gleichung $10 \cdot x^2 + v \cdot x - 3 = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1{,}5$.
Ermittle v und die zweite Lösung der Gleichung.

c) Die quadratische Gleichung $x^2 + s \cdot x + t = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 12$.
Ermittle s und t.

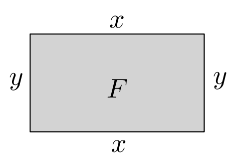
3.7

a) Gib die x-Koordinate des Scheitelpunkts der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 0{,}5 \cdot (x - 2) \cdot (x + 3)$ an.

b) Gib die Scheitelpunktform einer nach unten geöffneten quadratischen Funktion an, die an der Stelle $x = 4{,}5$ sowohl ihren Scheitelpunkt als auch eine Nullstelle besitzt.

3.8

Mit 42 m Zaun soll ein Rechteck mit möglichst großem Flächeninhalt umrandet werden.
Ein mögliches Rechteck ist rechts dargestellt.



a) Stelle mithilfe von x und y (in m) eine Formel für seinen Flächeninhalt F (in m^2) auf.

$F =$ ______

b) Der Umfang des Rechtecks beträgt 42 m. Stelle mithilfe von x eine Formel für y auf.

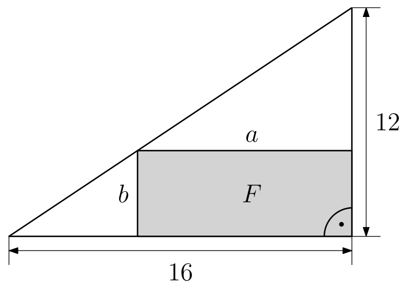
$y =$ ______

c) Verwende **a)** und **b)**, um mithilfe von x eine Formel für den Flächeninhalt F aufzustellen.

$F(x) =$ ______

d) Ermittle die Nullstellen und den Hochpunkt der quadratischen Funktion F.
Welche Abmessungen muss das Rechteck also haben, damit der Flächeninhalt größtmöglich ist?

3.9 MmF



Dem rechts dargestellten rechtwinkeligen Dreieck mit Katheten der Länge 12 cm und 16 cm schreiben wir Rechtecke ein, deren Seiten parallel zu den Katheten liegen.
Der Flächeninhalt F soll größtmöglich sein.

a) Stelle mithilfe von a und b (in cm) eine Formel für seinen Flächeninhalt F (in cm^2) auf.

$F =$

b) Stelle mithilfe von b eine Formel für a auf. (Hinweis: Ähnliche Dreiecke)

$a =$

c) Verwende **a)** und **b)**, um mithilfe von b eine Formel für den Flächeninhalt F aufzustellen.

$F(b) =$

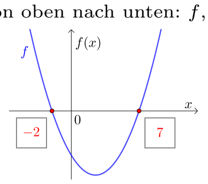
d) Ermittle die Nullstellen und den Hochpunkt der quadratischen Funktion F.
Welche Abmessungen muss das Rechteck also haben, damit der Flächeninhalt größtmöglich ist?

3.10 MmF

Von einer quadratischen Funktion f kennt man die beiden Punkte $N_1 = (\frac{3}{2} \mid 0)$ und $N_2 = (-\frac{1}{2} \mid 0)$.
Reichen diese Informationen aus, um die Koordinaten des Scheitelpunkts $S = (x_S \mid y_S)$ zu berechnen?
Begründe deine Antwort.

3.1 von oben nach unten: f, g, h, m

3.2 a)



b) $f(x) = 3 \cdot (x+2) \cdot (x-7)$

3.3 a) $f(x) = 2 \cdot (x+4) \cdot (x-2)$ **b)** $f(x) = 2 \cdot (x+1)^2 - 18$ **c)** $f(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$

3.4 a) $f(x) = 5 \cdot x \cdot (x - \frac{3}{5})$ **b)** $f(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x+4) \cdot x$ **c)** $f(x) = (x+1) \cdot (x+1)$

3.5 a) $x_1 \cdot x_2 = -15$ $x_1 + x_2 = 2$ **b)** $x_1 = 5$, $x_2 = -3$

3.6 a) $u = -21$, $x_2 = -7$ **b)** $v = -13$, $x_2 = -0{,}2$ **c)** $s = -8$, $t = -48$

3.7 a) $x_S = -0{,}5$ **b)** Zum Beispiel: $f(x) = -(x-4{,}5)^2$

3.8 a) $F = x \cdot y$ **b)** $y = 21 - x$ **c)** $F(x) = x \cdot (21 - x)$ **d)** Nullstellen: $x_1 = 0$ und $x_2 = 21$ Hochpunkt: $(10{,}5 \mid 110{,}25)$
Den größtmöglichen Flächeninhalt $F = 110{,}25\,\text{m}^2$ hat das Quadrat mit Seitenlänge $x = y = 10{,}5\,\text{m}$.

3.9 a) $F = a \cdot b$ **b)** $a = \frac{48 - 4 \cdot b}{3}$ **c)** $F(b) = (\frac{48 - 4 \cdot b}{3}) \cdot b$ **d)** Nullstellen: $b_1 = 0$ und $b_2 = 12$ Hochpunkt: $(6 \mid 48)$
Den größtmöglichen Flächeninhalt $F = 48\,\text{m}^2$ hat das Rechteck mit Seitenlängen $a = 8\,\text{cm}$ und $b = 6\,\text{cm}$.
(Die Seitenlängen des Rechtecks stehen dann im gleichen Verhältnis wie die Katheten des Dreiecks.)

3.10 Aus der Symmetrie folgt $x_S = \frac{1}{2}$.
Die quadratische Funktion $f(x) = a \cdot (x - \frac{3}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2})$ hat für jede Zahl $a \neq 0$ die beiden Nullstellen $\frac{3}{2}$ und $-\frac{1}{2}$.
y_S ist also *nicht* eindeutig. (y_S kann jede Zahl $\neq 0$ sein.)

4. Polynomfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Polynomfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Polynomdivision

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

4.1

Eine Polynomfunktion f hat die Nullstellen -3, 0, 4 und 8.

a) Welchen Grad muss f mindestens haben?

b) Ermittle einen möglichen Funktionsterm von f. Hinweis: Verwende die Linearfaktorform.

$f(x) =$ ____________________

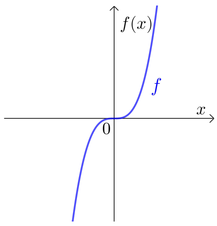
4.2

Ermittle den Grad der Polynomfunktion und ihre Nullstellen über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

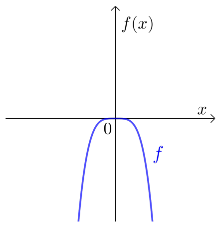
a) $f(x) = (x-3)\cdot(x+5)$ **b)** $f(x) = x\cdot(2\cdot x+14)\cdot(x^2+8\cdot x+15)$ **c)** $f(x) = (x^3-8)\cdot(x+1)\cdot(x^2-9)$

4.3

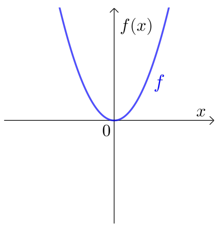
Der Graph einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a\cdot x^n$ ist dargestellt ($a \in \mathbb{R}^*$, $n \geq 1$).
Ist der Grad n gerade oder ungerade? Ist a positiv oder negativ? Kreuze jeweils an.

a) 

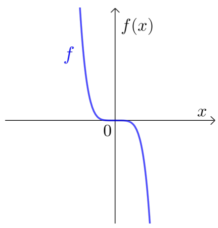
☐ n gerade ☐ n ungerade
☐ $a>0$ ☐ $a<0$

b) 

☐ n gerade ☐ n ungerade
☐ $a>0$ ☐ $a<0$

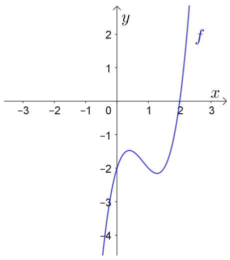
c) 

☐ n gerade ☐ n ungerade
☐ $a>0$ ☐ $a<0$

d) 

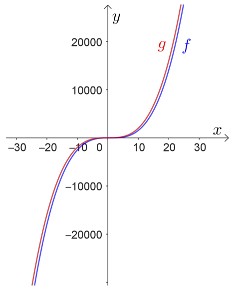
☐ n gerade ☐ n ungerade
☐ $a>0$ ☐ $a<0$

4.4



Für die Polynomfunktion f gilt: $f(x) = 2 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 2$

Ihr Funktionsgraph ist links dargestellt.



a) Trage richtige Terme in die Kästchen ein.

$$f(x) = 2 \cdot x^3 \cdot \left(\square - \square + \square - \square \right)$$

b) Wenn x betragsmäßig groß wird ($x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$), dann kommt der Klammerausdruck oben der Zahl $\square$ beliebig nahe.

Rechts oben ist auch der Funktionsgraph der Polynomfunktion g mit $g(x) = 2 \cdot x^3$ dargestellt.

Die beiden Polynomfunktionen haben das gleiche asympotische Verhalten. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Das asymptotische Verhalten jeder Polynomfunktion hängt nur vom Term $a \cdot x^n$ mit der größten Hochzahl n ab.

4.5

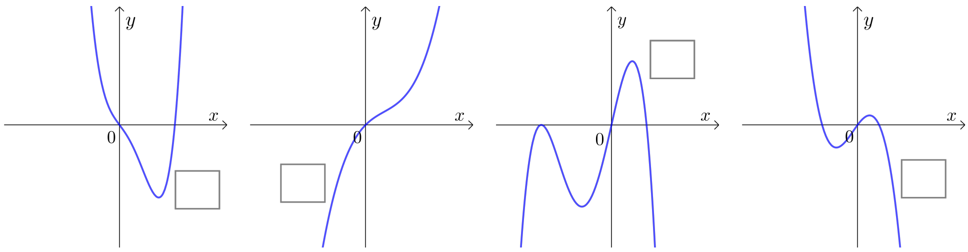
Die Graphen von 4 Polynomfunktionen sind dargestellt.
Außerhalb des dargestellten Bereichs haben die Polynomfunktionen keine weiteren Extrempunkte.
Ordne die 4 Funktionsgleichungen den Funktionsgraphen zu. Hinweis: Beachte das asymptotische Verhalten der Funktionen.

$f_1(x) = -2 \cdot x^3 - x^2 + 2 \cdot x$

$f_2(x) = -2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 + x$

$f_3(x) = 3 \cdot x^4 - 5 \cdot x^3 - 4 \cdot x$

$f_4(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + 3 \cdot x$



4.6

Vergrößert man die Kantenlänge a eines bestimmten Würfels mit Volumen V_1 um 3 cm, dann wird sein Volumen um 42 Liter größer.

a) Stelle mithilfe der Kantenlänge a (in cm) eine Formel für das Volumen V_1 (in cm^3) auf.

b) Zeige, dass für das Volumen V_2 des vergrößerten Würfels (in cm^3) gilt:

$$V_2 = a^3 + 9 \cdot a^2 + 27 \cdot a + 27$$

c) Berechne a.

4.7

Eine *biquadratische Gleichung* hat die Form $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ mit $a \neq 0$.
Durch die *Substitution* $u = x^2$ erhält man eine quadratische Gleichung in u.
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^4 - 2 \cdot x^2 - 8 = 0$

b) $x^4 - 10 \cdot x^2 + 9 = 0$

c) $2 \cdot x^4 - x^2 + 18 = 0$

d) $x^4 + 5 \cdot x^2 = 0$

e) $x^6 + 7 \cdot x^3 - 8 = 0$

f) $x^{42} + 8 \cdot x^{21} + 15 = 0$

4.8

Berechne die Nullstellen der Polynomfunktion f in $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x^4 - 13 \cdot x^2 + 36$

b) $f(x) = 3 \cdot x^4 - 17 \cdot x^2 - 28$

c) $f(x) = x^6 + 28 \cdot x^3 + 27$

d) $f(x) = x^8 - 25 \cdot x^4 + 144$

4.9

Löse die gegebene Polynomgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^{44} - 3 \cdot x^{43} - 10 \cdot x^{42} = 0$

b) $2 \cdot x^8 - 34 \cdot x^4 + 32 = 0$

c) ☆ $3 \cdot (x+3)^4 + 15 \cdot (x+3)^2 - 108 = 0$

d) ☆ $x \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2+1) - 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) = 0$

4.10

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ gibt es *genau eine* Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$? Wie lautet diese Lösung?

a) $a \cdot x^2 + 2 \cdot x + a = 0$

b) $x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

c) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 1 = 0$

d) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

e) $(x - 2 \cdot a - 1) \cdot (x + 3 \cdot a + 4) = 0$

f) $(a \cdot x + 1)^{42} + 1 = 0$

g) $(a \cdot x - 1)^{42} - 1 = 0$

h) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} + 1 = 0$

i) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} - 1 = 0$

4.11

Führe die Polynomdivision durch.

a) $\big(3 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 8\big) : (x - 4)$

b) $\big(-3 \cdot x^5 + 14 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4\big) : \big(-x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2\big)$

c) $(12 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 23 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 21) : (4 \cdot x - 3)$

d) $(2 + 6 \cdot x^4 - 7 \cdot x^2) : (2 - 3 \cdot x^2)$

e) $(8 \cdot x^5 + 12 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 9) : (2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4)$

f) $\big(8 \cdot x + 23 \cdot x^3 - 39 \cdot x^2 - 12 \cdot x^4 - 9\big) : \big(2 \cdot x - 3 \cdot x^2 - 5\big)$

4.12

Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 5 \cdot x^3 - 31 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 84$$

die Nullstellen -2 und 7 hat. Berechne die dritte Nullstelle, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

4.13

Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 12 \cdot x^4 - 19 \cdot x^3 - 192 \cdot x^2 - 71 \cdot x + 30$$

die Nullstellen -3 und 5 hat. Berechne die anderen beiden Nullstellen, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

4.14

Über die 3 reellen Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 60 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

sind folgende Informationen bekannt:

a) x_2 ist eine natürliche Zahl. **b)** x_3 ist dreimal so groß wie x_2. **c)** x_2^2 ist um 9 größer als x_1.

Berechne die Koeffizienten b und c.

4.15

Löse die Gleichung

$$x^5 - 5 \cdot x^3 - 36 \cdot x = 0$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

4.1 **a)** Grad 4 **b)** Zum Beispiel: $f(x) = (x+3) \cdot x \cdot (x-4) \cdot (x-8)$

4.2 **a)** Grad 2 mit Nullstellen 3 und -5 **b)** Grad 4 mit Nullstellen $0, -7, -3$ und -5 **c)** Grad 6 mit Nullstellen $2, -1, -3$ und 3

4.3 **a)** n ungerade, $a > 0$ **b)** n gerade, $a < 0$ **c)** n gerade, $a > 0$ **d)** n ungerade, $a < 0$

4.4 **a)** $f(x) = 2 \cdot x^3 \cdot \left(1 - \frac{5}{2 \cdot x} + \frac{3}{2 \cdot x^2} - \frac{1}{x^3}\right)$ **b)** 1

4.5 Von links nach rechts: f_3, f_4, f_2, f_1

4.6 **a)** $V_1 = a^3$ **b)** $V_2 = (a+3)^3 = \cdots = a^3 + 9 \cdot a^2 + 27 \cdot a + 27$ **c)** $a = 66{,}80\ldots$ cm

4.7 **a)** $L = \{-2, 2\}$ **b)** $L = \{-1, 1, -3, 3\}$ **c)** $L = \{\ \}$ **d)** $L = \{0\}$ **e)** $L = \{-2, 1\}$ **f)** $L = \{\sqrt[21]{-5}, \sqrt[21]{-3}\}$

4.8 **a)** $\{-3, -2, 2, 3\}$ **b)** $\{-\sqrt{7}, \sqrt{7}\}$ **c)** $\{-3, -1\}$ **d)** $\{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$

4.9 **a)** $L = \{-2, 0, 5\}$ **b)** $L = \{-2, -1, 1, 2\}$ **c)** $L = \{-5, -1\}$ **d)** $L = \{-3, 2, 5\}$

4.10 **a)** $a = 1 \implies x = -1 \quad a = -1 \implies x = 1$

b) $a = 0 \implies x = 0 \quad a = 1 \implies x = -1$

c) $a = 1 \implies x = -1$

d) $a \neq 0 \implies x = -1$ ($a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen.)

e) $a = -1 \implies x = -1$

f) Keiner: Die linke Seite ist für alle $a, x \in \mathbb{R}$ größer als 0.

g) Keiner: $a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen, $a \neq 0$ liefert immer 2 Lösungen $x = 0$ und $x = \frac{2}{a}$

h) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1+65 \cdot a}{-13}$

i) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1-65 \cdot a}{-13}$

4.11 **a)** $3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 2$ **b)** $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$ **c)** $3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7$ **d)** $-2 \cdot x^2 + 1$ **e)** $4 \cdot x^3 + 5 \cdot x - 3 + \dfrac{42 \cdot x - 3}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4}$
f) $4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 + \frac{-23 \cdot x + 6}{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5}$

4.12 $x_3 = \frac{6}{5}$ $\quad f(x) = 5 \cdot (x+2) \cdot (x-7) \cdot (x - \frac{6}{5})$

4.13 $x_3 = -\frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{1}{4}$ $\quad f(x) = 12 \cdot (x+3) \cdot (x-5) \cdot (x + \frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{1}{4})$

4.14 $b = -3$, $c = -28$

4.15 $L = \{-3, 0, 3\}$