

## MATHEMATIK AUF AUGENHÖHE – 12. SCHULSTUFE

## INHALTSVERZEICHNIS

1. Stammfunktionen	2
2. Untersummen, Obersummen & Bestimmtes Integral	5
3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	13
4. Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen	19
5. Normalverteilung	22



Mathematik auf Augenhöhe



- Die Aufgaben dieser Sammlung haben eine wesentliche Gemeinsamkeit:  
Für die Bearbeitung reichen Stift, Papier, Geodreieck und eventuell eine [Formelsammlung](#).
- Die mit ★ markierten Aufgaben sind anspruchsvoller.
- Zu Beginn jedes Abschnitts ist ein QR-Code, der zum ersten passenden [MmF-Arbeitsblatt](#) verlinkt ist.
- Die Aufgabensammlungen stehen allen interessierten Personen kostenlos unter einer [Creative Commons BY-NC-ND 4.0-Lizenz](#) zur Verfügung. Weitere Informationen dazu stehen in unseren [FAQ](#).
- Wir bedanken uns bei allen Kolleg\*innen, die mit ihren zahlreichen Ideen und Rückmeldungen zur Weiterentwicklung dieser [Aufgabensammlungen](#) beigetragen haben.  
Wir freuen uns über Feedback an [mmf@univie.ac.at](mailto:mmf@univie.ac.at).

1. STAMMFUNKTIONEN



MmF-Materialien MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ [Arbeitsblatt – Stammfunktionen](#)

1.1

MmF

Ermittle die Gleichungen aller Stammfunktionen der gegebenen Funktion  $f$ .

- a)  $f(x) = 5 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 8$       c)  $f(x) = (x - 4) \cdot (x - 2)$       e)  $f(x) = e^x - x^e$        $e = 2,718\ 281\dots$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^4 - 10$       d)  $f(x) = e^x + 2 \cdot \cos(x)$       f)  $f(x) = \frac{\sin(x)}{3} + 4 \cdot x^8$

1.2

MmF

Ermittle eine Gleichung jener Stammfunktion  $F$  von  $f$ , die die gegebene Bedingung erfüllt.

- a)  $f(x) = x^2 + 3 \cdot x - 42$ ,  $F(0) = 8$     b)  $f(x) = e^x - \sin(x)$ ,  $F(0) = -1$     c)  $f(x) = 1 + \frac{\cos(x)}{2}$ ,  $F(0) = 3$

1.3

MmF

Ermittle eine Gleichung jener Funktion  $f$ , die ...

- a) ...  $f''(x) = 12 \cdot x - 8$ ,  $f'(2) = 11$  und  $f(1) = 0$  erfüllt.  
 b) ...  $f''(x) = 6 \cdot x - 4$ ,  $f(0) = 3$  und  $f(1) = 4$  erfüllt.

1.4

MmF

Ermittle die Gleichungen aller Stammfunktionen der gegebenen Funktion  $f$ .

- a)  $f(x) = 4 \cdot \cos(x) - 2$     b)  $f(x) = \cos(4 \cdot x) - 2$     c)  $f(x) = 4 \cdot \cos(x - 2)$     d)  $f(x) = \cos(4 \cdot x - 2)$

1.5

MmF

Ermittle die Gleichungen aller Stammfunktionen der gegebenen Funktion  $f$ .

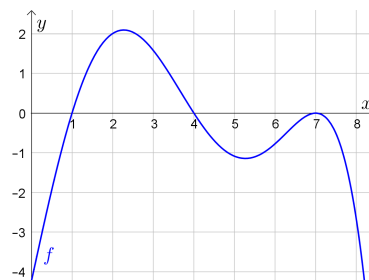
- a)  $f(x) = -3 \cdot e^x + 5$     b)  $f(x) = e^{-3 \cdot x} + 5$     c)  $f(x) = -3 \cdot e^{x+5}$     d)  $f(x) = e^{-3 \cdot x+5}$

1.6

MmF

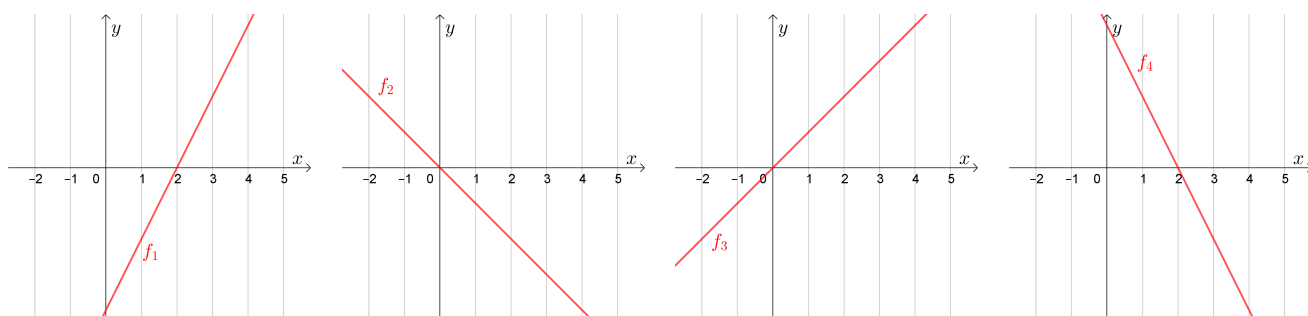
Der Graph einer Funktion  $f$  ist dargestellt.  $F$  ist eine Stammfunktion von  $f$ .

- a) An welchen Stellen hat der Graph von  $F$  eine waagrechte Tangente?  
 Begründe jeweils, ob  $F$  dort eine lokale Maximalstelle, eine lokale Minimalstelle oder eine Sattelstelle hat.  
 b) Beschreibe das Monotonieverhalten von  $F$ .  
 c) Markiere auf der  $x$ -Achse alle Stellen, an denen  $F$  das Krümmungsverhalten ändert.

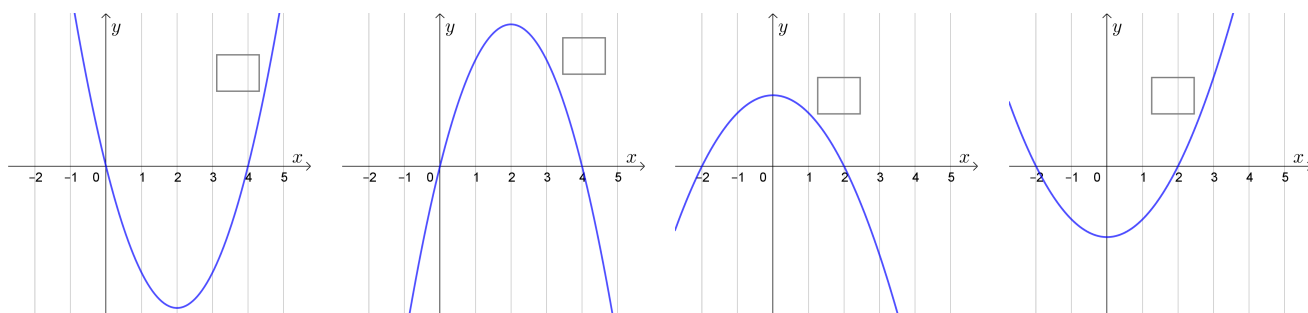


1.7

In den folgenden Bildern sind die Graphen von 4 linearen Funktionen  $f_1, f_2, f_3$  bzw.  $f_4$  dargestellt:



In den folgenden Bildern sind die Graphen von 4 quadratischen Funktionen  $F_1, F_2, F_3$  bzw.  $F_4$  dargestellt. Beschrifte die Graphen unten so, dass  $F_i$  eine Stammfunktion von  $f_i$  ist ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).



1.8

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  eines bestimmten Autos bei einer Bremsung gilt:

$$v(t) = 20 - 5 \cdot t$$

$t$  ... Zeit ab Beginn der Bremsung in s

$v(t)$  ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  in m/s

a) Wie viele Sekunden dauert es, bis das Auto still steht?

Für die zugehörige Weg-Zeit-Funktion  $s$  gilt  $s'(t) = v(t)$  und  $s(0) = 0$  m.

b) Ermittle eine Funktionsgleichung von  $s$ .

c) Berechne die Länge des Bremswegs.



1.9

Für die Beschleunigung-Zeit-Funktion  $a$  eines bestimmten Autos gilt:

$$a(t) = t + 1$$

$t$  ... Zeit ab Beginn der Beschleunigung in s

$a(t)$  ... Beschleunigung zum Zeitpunkt  $t$  in  $\text{m/s}^2$

Für die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  gilt  $v'(t) = a(t)$  und  $v(0) = 8 \text{ m/s}$ .



- a) Ermittle eine Funktionsgleichung von  $v$ .
- b) Um wieviel  $\text{m/s}$  ist das Auto zum Zeitpunkt  $t = 6$  schneller als zum Zeitpunkt  $t = 2$ ?

- 1.1 a)  $F(x) = \frac{5}{3} \cdot x^3 - x^2 + 8 \cdot x + c$     b)  $F(x) = \frac{1}{15} \cdot x^5 - 10 \cdot x + c$     c)  $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 8 \cdot x + c$     d)  $F(x) = e^x + 2 \cdot \sin(x) + c$   
 e)  $F(x) = e^x - \frac{1}{e+1} \cdot x^{e+1} + c$     f)  $F(x) = -\frac{\cos(x)}{3} + \frac{4}{9} \cdot x^9 + c$
- 1.2 a)  $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 - 42 \cdot x + 8$     b)  $F(x) = e^x + \cos(x) - 3$     c)  $F(x) = x + \frac{\sin(x)}{2} + 3$
- 1.3 a)  $f(x) = 2 \cdot x^3 - 4 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1$     b)  $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 3$
- 1.4 a)  $F(x) = 4 \cdot \sin(x) - 2 \cdot x + c$     b)  $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot x) - 2 \cdot x + c$     c)  $F(x) = 4 \cdot \sin(x - 2) + c$     d)  $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin(4 \cdot x - 2) + c$
- 1.5 a)  $F(x) = -3 \cdot e^x + 5 \cdot x + c$     b)  $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3 \cdot x} + 5 \cdot x + c$     c)  $F(x) = -3 \cdot e^{x+5} + c$     d)  $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{-3 \cdot x+5} + c$
- 1.6 a) An der Stelle  $x = 1$  befindet sich ein lokales Minimum von  $F$ , weil  $F' = f$  dort das Vorzeichen von  $-$  auf  $+$  wechselt.  
 An der Stelle  $x = 4$  befindet sich ein lokales Maximum von  $F$ , weil  $F' = f$  dort das Vorzeichen von  $+$  auf  $-$  wechselt.  
 An der Stelle  $x = 7$  befindet sich ein Sattelpunkt von  $F$ , weil  $F'(7) = f(7) = 0$  und  $F' = f$  dort das Vorzeichen *nicht* wechselt.
- b)  $F$  ist monoton wachsend in  $[1; 4]$ , weil  $F'(x) = f(x) \geq 0$ . In allen anderen Bereichen ist  $F$  monoton fallend, weil  $F'(x) \leq 0$ .
- c) Bei den drei Extremstellen von  $f$  ändert sich das Krümmungsverhalten von  $F$ , weil  $F'' = f'$  dort das Vorzeichen wechselt.
- 1.7 Von links nach rechts:  $F_1, F_4, F_2, F_3$
- 1.8 a) 4 Sekunden    b)  $s(t) = 20 \cdot t - \frac{5}{2} \cdot t^2$     c) 40 m
- 1.9 a)  $v(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 + t + 8$     b) 20 m/s

2. UNTERSUMMEN, OBERSUMMEN & BESTIMMTES INTEGRAL



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

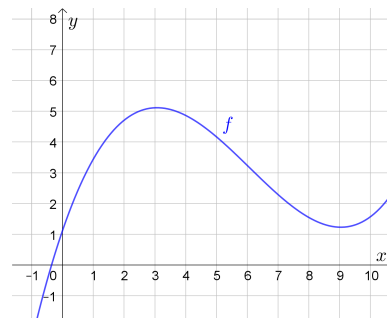
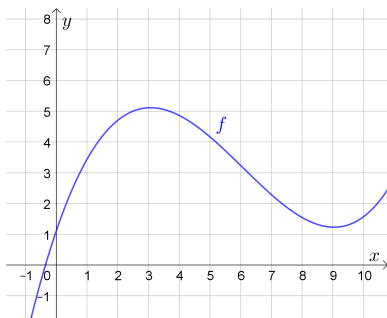
- ✓ [Arbeitsblatt – Kulturtechnik Integration](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Bestimmtes Integral](#)

2.1

Das bestimmte Integral  $\int_0^{10} f(x) dx$  wird durch Unter- und Obersummen angenähert.

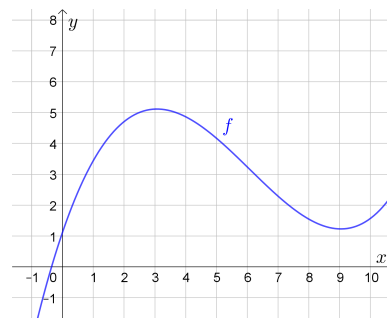
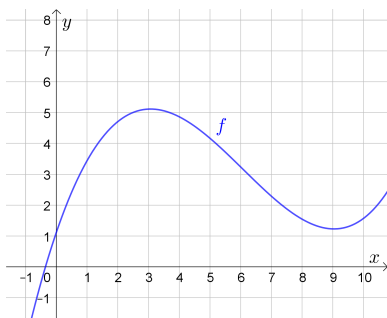
Dafür werden jeweils  $n$  gleich breite Rechtecke verwendet.

a)  $n = 2$ : Veranschauliche links die Untersumme und rechts die Obersumme, und ermittle sie näherungsweise.



Es gilt also: \_\_\_\_\_  $\leq \int_0^{10} f(x) dx \leq$  \_\_\_\_\_

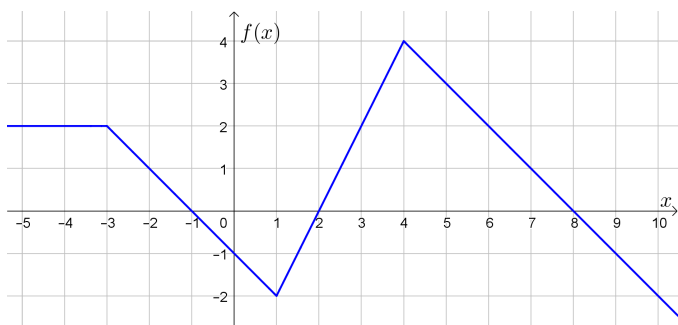
b)  $n = 5$ : Veranschauliche links die Untersumme und rechts die Obersumme, und ermittle sie näherungsweise.



Es gilt also: \_\_\_\_\_  $\leq \int_0^{10} f(x) dx \leq$  \_\_\_\_\_

2.2

Der Graph einer stückweise linearen Funktion  $f$  ist dargestellt. Ermittle das angegebene bestimmte Integral.



a)  $\int_2^8 f(x) dx = \square$

b)  $\int_{-5}^{-1} f(x) dx = \square$

c)  $\int_{-1}^2 f(x) dx = \square$

d)  $\int_{-1}^4 f(x) dx = \square$

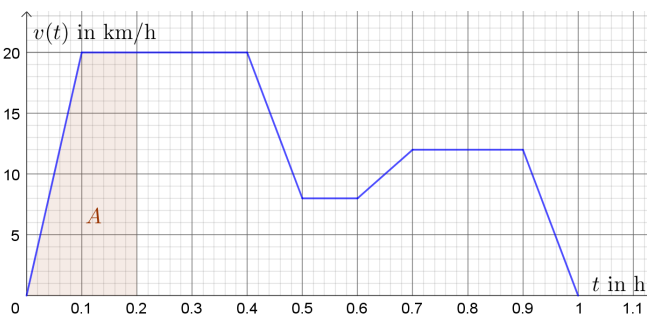
2.3

Der Graph einer stückweise linearen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  ist im Zeitintervall  $[0 \text{ h}; 1 \text{ h}]$  dargestellt.

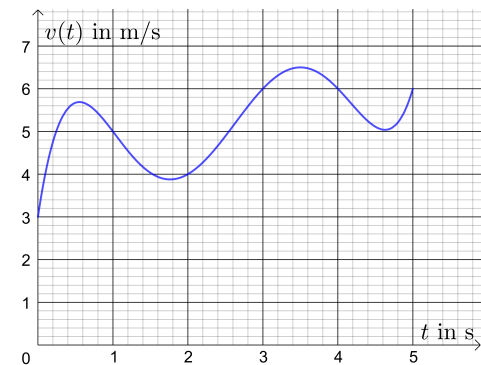
a) Ermittle den rechts markierten Flächeninhalt  $A$ .

Welche Einheit hat  $\int_0^{0,2} v(t) dt$ ?

b) Wie viele Meter wurden in den letzten 12 Minuten des Intervalls  $[0 \text{ h}; 1 \text{ h}]$  zurückgelegt?



2.4



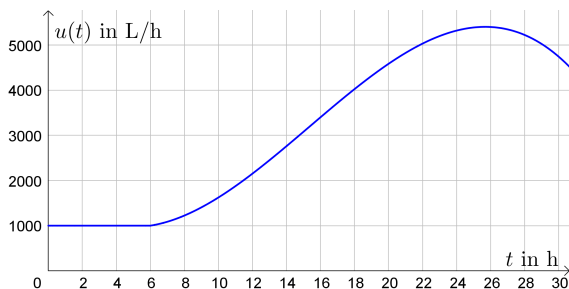
Der Graph einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$  ist im Zeitintervall  $[0 \text{ s}; 5 \text{ s}]$  dargestellt.

a) Lies die minimale bzw. maximale Geschwindigkeit im gesamten Zeitraum ab. Gib mithilfe dieser beiden Werte eine untere bzw. obere Schranke für den in  $[0 \text{ s}; 5 \text{ s}]$  zurückgelegten Weg an.

b) Veranschauliche links die Untersumme mit 5 gleich breiten Rechtecken. Gib mithilfe dieser Untersumme eine untere Schranke für den in  $[0 \text{ s}; 5 \text{ s}]$  zurückgelegten Weg an.

2.5

Durch ein Wasserrohr fließt Wasser zu. Unter dem *Volumenstrom* versteht man jenes Wasservolumen, das pro Zeiteinheit zufließt. Der Volumenstrom (in Liter pro Stunde) in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (in Stunden) wird durch die dargestellte Funktion  $u$  beschrieben.



- a) Ermittle jene Wassermenge, die innerhalb der ersten 6 Stunden zugeflossen ist.
- b) Kennzeichne im Diagramm jene Wassermenge, die innerhalb der ersten 14 Stunden zugeflossen ist.
- c) Erstelle eine Formel zur Berechnung jener Wassermenge, die am ersten Tag zugeflossen ist.

2.6

Der Graph einer linearen Funktion  $f$  ist dargestellt.

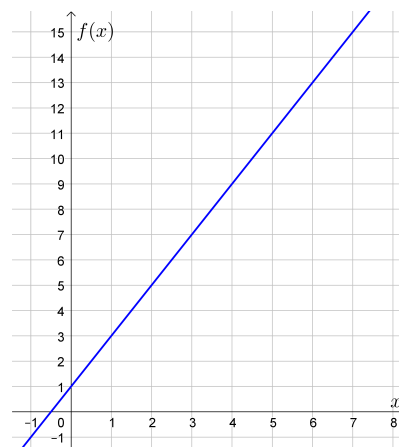
- a) Zeichne eine Fläche ein, deren Inhalt mit

$$A = \int_0^6 f(x) dx$$

berechnet wird. Ermittle diesen Flächeninhalt.

- b) Ermittle eine Funktionsgleichung von  $f$ .
- c) Berechne jene positive Zahl  $b$ , für die gilt:

$$\int_0^b f(x) dx = 12$$



2.7

Der Graph einer stückweise linearen Funktion  $f$  ist im Intervall  $[0; 7]$  dargestellt. Für die Funktion  $F$  gilt:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

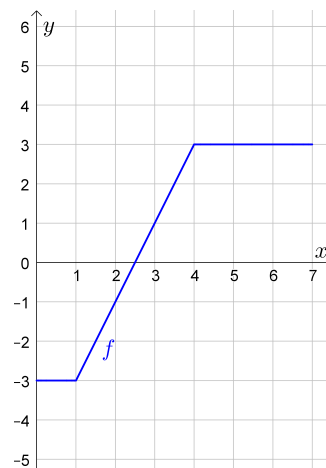
- a) Vervollständige die Wertetabelle von  $F$ .

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$F(x)$								

- b) Skizziere den Graphen der Funktion  $F$  rechts im Koordinatensystem.

Anmerkung: Die Funktion  $F$  ist jene Stammfunktion von  $f$ , die  $F(0) = 0$  erfüllt.

(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)





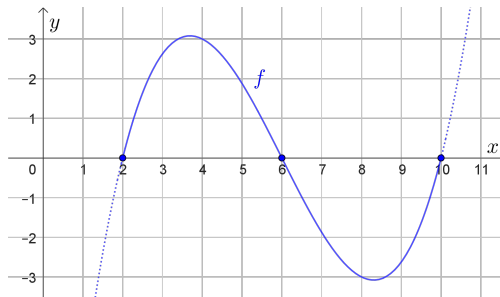
2.8

Der Graph der rechts dargestellten Funktion  $f$  ist symmetrisch zum Punkt  $(6 | 0)$ .

Wir untersuchen die Integralfunktion  $F$  mit

$$F(x) = \int_2^x f(t) dt$$

im Intervall  $[2; 10]$ . Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.



- a) In  $[2; 10]$  hat die Funktion  $F$  die beiden Nullstellen  und .
- b) In  $[2; 10]$  nimmt die Funktion  $F$  den größten Funktionswert an der Stelle  $x =$   an.
- c) In  $[2; 10]$  nimmt die Funktion  $F$  den kleinsten Funktionswert an den Stellen  $x =$   und  $x =$   an.

2.9

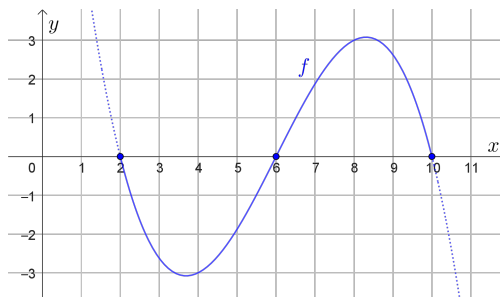


Der Graph der rechts dargestellten Funktion  $f$  ist symmetrisch zum Punkt  $(6 | 0)$ .

Wir untersuchen die Integralfunktion  $F$  mit

$$F(x) = \int_2^x f(t) dt$$

im Intervall  $[2; 10]$ . Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.



- a) In  $[2; 10]$  hat die Funktion  $F$  die beiden Nullstellen  und .
- b) In  $[2; 10]$  nimmt die Funktion  $F$  den größten Funktionswert an den Stellen  $x =$   und  $x =$   an.
- c) In  $[2; 10]$  nimmt die Funktion  $F$  den kleinsten Funktionswert an der Stelle  $x =$   an.

2.10



Rechts ist der Graph einer Funktion  $f$  dargestellt.

Wir untersuchen die Integralfunktion  $F$  mit

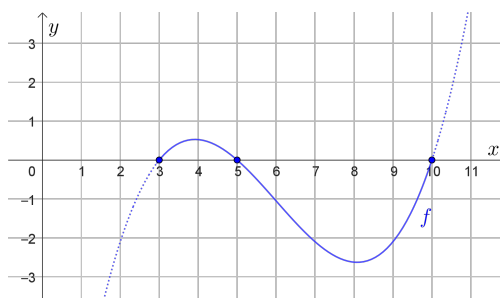
$$F(x) = \int_3^x f(t) dt$$

im Intervall  $[3; 10]$ . Sortiere die 5 Funktionswerte

$$F(3), F(4), F(5), F(8) \text{ und } F(10)$$

in aufsteigender Reihenfolge:

$$\boxed{\phantom{0}} < \boxed{\phantom{0}} < \boxed{\phantom{0}} < \boxed{\phantom{0}} < \boxed{\phantom{0}}$$





**2.11**

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion  $f$  dargestellt.

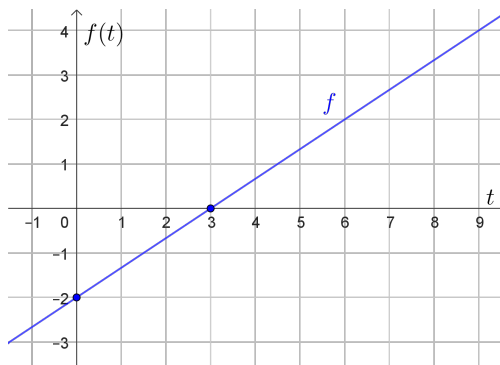
Wir untersuchen die Integralfunktionen  $F_1$  und  $F_2$  mit

$$F_1(x) = \int_3^x f(t) dt \quad \text{und} \quad F_2(x) = \int_0^x f(t) dt$$

für  $x \geq 3$ .

a) Vervollständige die Wertetabelle.

$x$	3	6	9	12
$F_1(x)$				
$F_2(x)$				



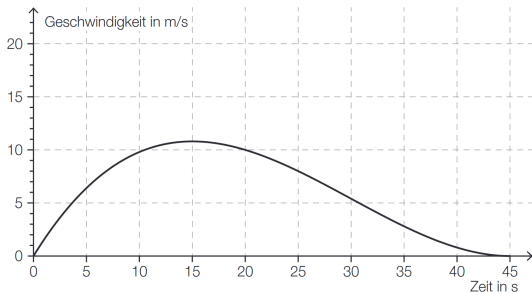
b) An jeder Stelle  $x \geq 3$  gilt:  $F_2(x) - F_1(x) = \int_{\square}^{\square} f(t) dt = \square$

Daraus folgt:  $F_1'(x) = F_2'(x)$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sind  $F_1$  und  $F_2$  zwei verschiedene Stammfunktionen von  $f$ .

Tatsächlich sind  $F_1$  und  $F_2$  auch für  $x < 3$  Stammfunktionen von  $f$ , indem man zum Beispiel  $F_1(0) = \int_3^0 f(t) dt = -\int_0^3 f(t) dt$  definiert.

**2.12**

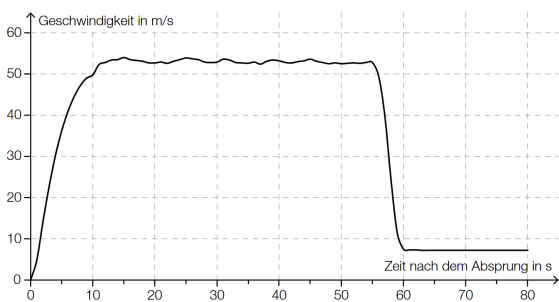


Der nebenstehend dargestellte Graph zeigt annähernd den Geschwindigkeitsverlauf eines im Stadtgebiet fahrenden Autos.

- 1) Ermitteln Sie näherungsweise die Länge des im Zeitintervall  $[0; 45]$  zurückgelegten Weges.
- 2) Lesen Sie die Höchstgeschwindigkeit des Autos ab. Geben Sie das Ergebnis in km/h an.

**2.13**

Bei einem Fallschirmsprung wurde der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit eines Fallschirmspringers aufgezeichnet. Im nachstehenden Diagramm wird diese Geschwindigkeit für die ersten 80 Sekunden nach dem Absprung veranschaulicht.



55 Sekunden nach dem Absprung zieht der Fallschirmspringer die Reißleine, der Fallschirm öffnet sich.

- 1) Schätzen Sie den Flächeninhalt zwischen der Geschwindigkeitskurve und der Zeitachse im Intervall  $[0s; 55s]$  ab.
- 2) Interpretieren Sie die Bedeutung dieses Flächeninhalts im gegebenen Sachzusammenhang unter Angabe der entsprechenden Einheit.

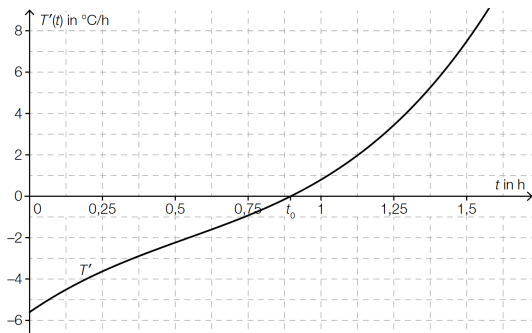
2.14

Während eines Nachmittags, an dem es ein Gewitter gab, wurde die Veränderung der Temperatur ermittelt. Die Funktion  $T'$  beschreibt die momentane Änderungsrate der Temperatur in Abhängigkeit von der Zeit  $t$  (siehe nachstehende Abbildung).

$t$  ... Zeit seit Beginn der Messung in h

$T'(t)$  ... momentane Änderungsrate der Temperatur zur Zeit  $t$  in °C/h

Die Funktion  $T'$  hat an der Stelle  $t_0$  eine Nullstelle (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Jede Stammfunktion von $T'$ hat an der Stelle $t_0$ eine Maximumstelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Stammfunktion von $T'$ hat an der Stelle $t_0$ eine Minimumstelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Stammfunktion von $T'$ hat an der Stelle $t_0$ eine Nullstelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Stammfunktion von $T'$ hat an der Stelle $t_0$ eine Wendestelle.	<input type="checkbox"/>
Jede Stammfunktion von $T'$ hat an der Stelle $t_0$ eine positive Steigung.	<input type="checkbox"/>

Die absolute Temperaturänderung in einem Zeitintervall  $[t_1; t_2]$  kann durch das Integral  $\int_{t_1}^{t_2} T'(t) dt$  berechnet werden. (Anmerkung: Das folgt aus dem [Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung](#).)

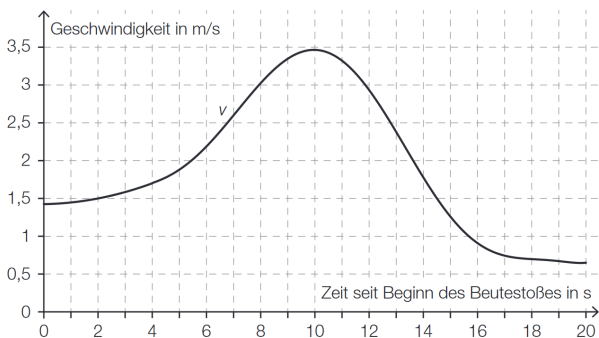
2) Bestimmen Sie mithilfe der obigen Abbildung näherungsweise die absolute Temperaturänderung im Zeitintervall  $[1,25; 1,5]$ .

2.15

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: Spektrum der Wissenschaft November 2010, S. 60-67.

Die Geschwindigkeit eines Furchenwals bei einem Beutestoß, der insgesamt 20 s dauert, kann näherungsweise durch die Funktion  $v$  beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Schätzen Sie die Länge  $s$  desjenigen Weges ab, der bei diesem Beutestoß zurück gelegt wird.

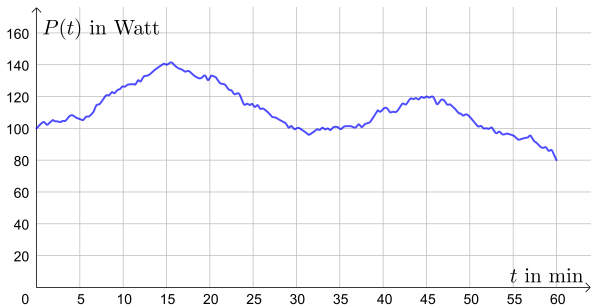
$$s \approx \underline{\hspace{2cm}} \text{ m}$$

Ein Forscher behauptet:

„Der Furchenwal erreicht bei diesem Beutestoß eine maximale Geschwindigkeit von 15 km/h.“

2) Weisen Sie nach, dass diese Behauptung falsch ist.

2.16



Lukas trainiert eine Stunde lang am Ergometer. Das Ergometer zeichnet seine Leistung auf. Links ist der Graph der Funktion  $P$  dargestellt.

$t \dots$  Zeit in min (mit  $0 \leq t \leq 60$ )  
 $P(t) \dots$  Leistung zum Zeitpunkt  $t$  in Watt (W)

a) Schätze mithilfe der Abbildung den Wert von  $\int_{15}^{30} P(t) dt$  ab.

Trage den Schätzwert inkl. Einheit in die folgenden Kästchen ein:

$$\int_{15}^{30} P(t) dt \approx \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{Maßzahl}} \underbrace{\hspace{2cm}}_{\text{Einheit}}$$

b) Ein *Smart Meter* ist ein digitaler Stromzähler. Für den Tag seines Trainings zeigt der Smart Meter in seiner Wohnung den Tagesbedarf 5,047 kWh (Kilowattstunden) an.

Für seine Trainingseinheit gilt:  $\int_0^{60} P(t) dt \approx 6750 \text{ Wmin}$

Wie viel Prozent des angezeigten Tagesbedarfs könnte Lukas mit seiner Trainingseinheit abdecken?

Schätze das Ergebnis mit einer Überschlagsrechnung ab und kreuze an.

- $\approx 1\%$      $\approx 2\%$      $\approx 5\%$      $\approx 10\%$      $\approx 15\%$      $\approx 20\%$

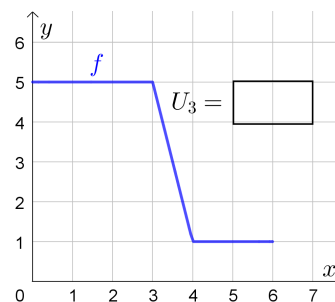
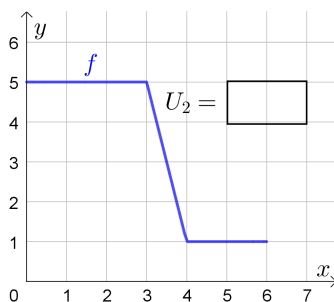
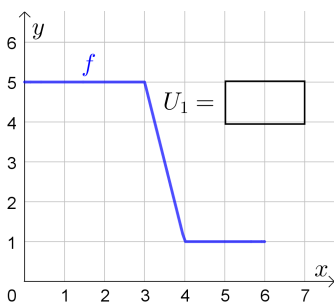
2.17

Der Graph einer stückweise linearen Funktion  $f$  ist im Intervall  $[0; 6]$  dargestellt.

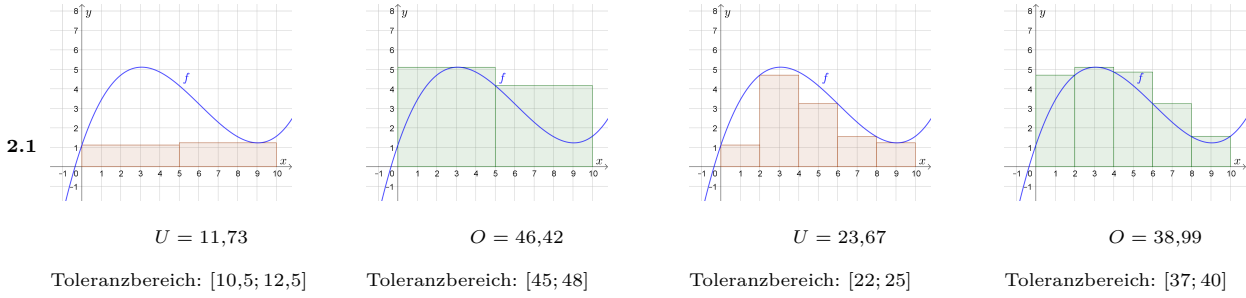
Wir nähern das bestimmte Integral  $\int_0^6 f(x) dx$  durch Untersummen an.

Dafür verwenden wir jeweils  $n$  gleich breite Rechtecke. Die zugehörige Untersumme kürzen wir mit  $U_n$  ab.

Ermittle die Untersummen  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$ .



Ein weit verbreiteter *Irrglaube* ist, dass allgemein  $U_1 \leq U_2 \leq U_3 \leq U_4 \leq \dots$  gilt. Diese Funktion ist ein Gegenbeispiel.

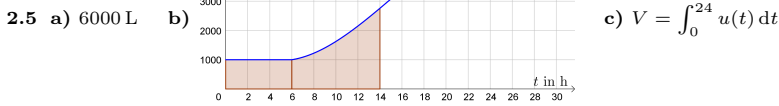
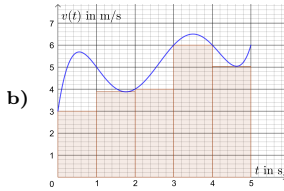


$$11,73 \leq \int_0^{10} f(x) dx \leq 46,42 \qquad 23,67 \leq \int_0^{10} f(x) dx \leq 38,99$$

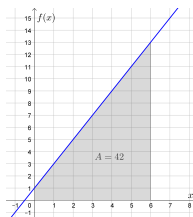
2.2 a)  $\int_2^8 f(x) dx = 12$     b)  $\int_{-5}^{-1} f(x) dx = 6$     c)  $\int_{-1}^2 f(x) dx = -3$     d)  $\int_{-1}^4 f(x) dx = 1$

2.3 a)  $A = 3 \text{ km}$     b)  $1800 \text{ m}$

2.4 a)  $v_{\min} = 3 \text{ m/s}$ ,  $v_{\max} \approx 6,5 \text{ m/s}$ . Es wurden mindestens 15 m und höchstens  $\approx 32,5 \text{ m}$  zurückgelegt. (Toleranzbereich: [32 m; 33 m])

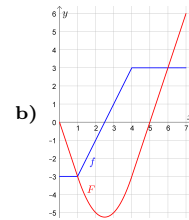


2.6 a)  $A = 42$     b)  $f(x) = 2 \cdot x + 1$     c)  $b = 3$



2.7 a)

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$F(x)$	0	-3	-5	-5	-3	0	3	6



2.8 a) 2 und 10    b) 6    c) 2 und 10

2.9 a) 2 und 10    b) 2 und 10    c) 6

2.10  $F(10) < F(8) < F(3) < F(4) < F(5)$

2.11 a)

$x$	3	6	9	12
$F_1(x)$	0	3	12	27
$F_2(x)$	-3	0	9	24

b)  $F_2(x) - F_1(x) = \int_0^3 f(t) dt = -3$

2.12 1) Toleranzbereich: [220 m; 330 m]    2) Toleranzbereich: [37,8 km/h; 41,4 km/h]

2.13 1) Toleranzbereich: [2400 m; 2900 m]    2) Der Fallschirmspringer hat in den ersten 55 Sekunden ca. 2650 m zurückgelegt.

2.14 1) 2. Antwort von oben    2) Toleranzbereich: [1,2 °C; 1,45 °C]

2.15 1) Toleranzbereich: [30 m; 50 m]    2) Die maximale Geschwindigkeit ist kleiner als  $3,5 \text{ m/s} = 12,6 \text{ km/h}$ , also kleiner als 15 km/h.

2.16 a)  $\int_{15}^{30} P(t) dt \approx 1800 \text{ Wmin}$  (Toleranzbereich: [1700 Wmin; 1900 Wmin])    b)  $\approx 2\%$

2.17  $U_1 = 6$ ,  $U_2 = 18$ ,  $U_3 = 14$  (Es ist also  $U_2$  größer als  $U_3$ .)

3. HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG



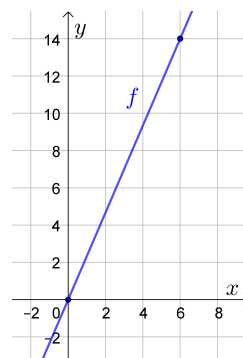
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Partielle Integration](#)

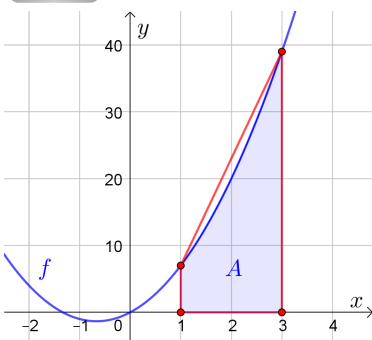
**3.1**

Der Graph einer linearen Funktion  $f$  ist rechts dargestellt.

- a) Zeichne rechts eine Fläche mit Inhalt  $A = \int_0^6 f(x) dx$  ein.
- b) Berechne  $A$  ohne Verwendung einer Stammfunktion von  $f$ .
- c) Ermittle eine Stammfunktion von  $f$  und berechne damit  $A$ .



**3.2**



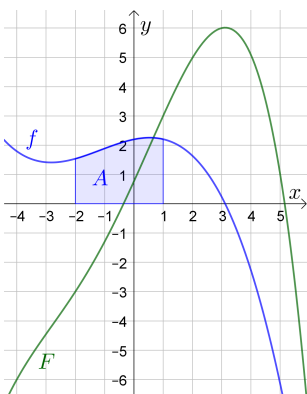
Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x$  ist dargestellt.

Für den Inhalt der links markierten Fläche gilt:  $A = \int_1^3 f(x) dx$

- a) Diese Fläche wird durch das eingezeichnete Trapez angenähert. Berechne den Flächeninhalt  $T$  des Trapezes.
- b) Berechne den Flächeninhalt  $A$ .
- c) Um wie viel Prozent ist  $T$  ungefähr größer als  $A$ ?  
Schätze das Ergebnis mit einer Überschlagsrechnung ab und kreuze an.  
  $\approx 1\%$      $\approx 5\%$      $\approx 10\%$      $\approx 15\%$      $\approx 20\%$

**3.3**

Der Graph einer Funktion  $f$  und der Graph einer ihrer Stammfunktionen  $F$  sind dargestellt.



- a) Ermittle mithilfe von  $F$  den Inhalt  $A$  der links markierten Fläche.
- b) Ermittle  $\int_{-4}^1 f(x) dx$ .
- c) Ermittle  $\int_{-2}^5 f(x) dx$ .
- d) Ermittle  $\int_1^5 f(x) dx$ .

Kannst du anhand des Graphen von  $f$  erklären, warum das Ergebnis bei **d)** negativ ist?

3.4

Berechne das bestimmte Integral.

a)  $\int_0^3 (4 \cdot x - 2) dx$    b)  $\int_0^3 4 \cdot (x - 2) dx$    c)  $\int_0^3 (x - 4) \cdot (x - 2) dx$    d)  $\int_0^3 (x - 4)^2 dx$

3.5

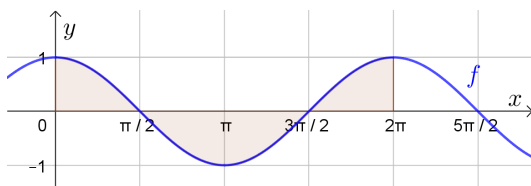
Berechne das Ergebnis.

Quadrieren und Integrieren darf man also *nicht* vertauschen.

a)  $\left[ \int_0^4 (3 \cdot x - 5) dx \right]^2$    b)  $\int_0^4 (3 \cdot x - 5)^2 dx$

3.6

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \cos(x)$  ist dargestellt.



a) Berechne  $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ .

b) Der Funktionsgraph von  $f$  schließt mit der  $x$ -Achse im Intervall  $[0; 2\pi]$  die links markierte Fläche ein. Berechne den Inhalt dieser Fläche.

3.7

Der Graph einer Beschleunigung-Zeit-Funktion  $a$  ist rechts unten dargestellt.

a) Berechne den Inhalt  $F$  der markierten Fläche.

Welche Einheit hat  $\int_0^4 a(t) dt$ ?

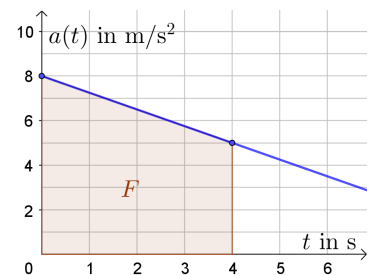
Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt:

$$F = \int_0^4 a(t) dt = v(4) - v(0)$$

b) Welche Bedeutung hat also der Wert von  $F$  in Bezug auf die Geschwindigkeit im Zeitintervall  $[0; 4]$ ?

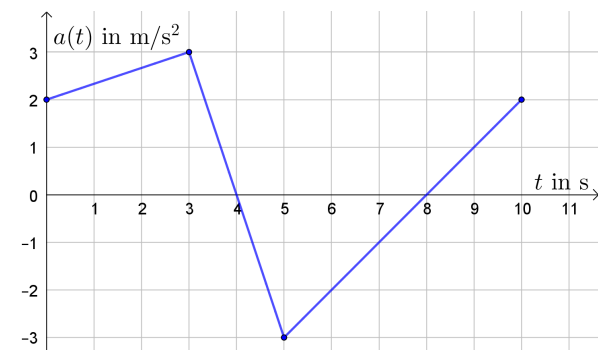
Die Anfangsgeschwindigkeit beträgt  $v(0) = 3 \text{ m/s}$ .

c) Ermittle eine Gleichung der zugehörigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v$ .



3.8

Der Graph einer Beschleunigung-Zeit-Funktion ist im Intervall  $[0; 10]$  dargestellt.



Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

a) Im Intervall  $[0; 10]$  ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = \boxed{\phantom{00}}$  s maximal.

b) Im Intervall  $[0; 10]$  ist die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = \boxed{\phantom{00}}$  s minimal.

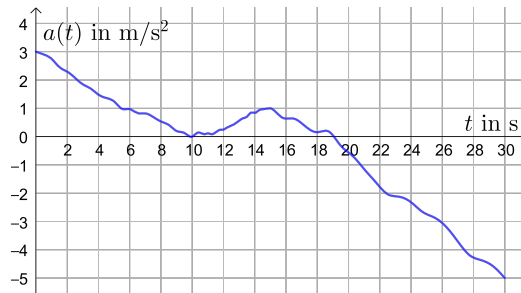
c) Zum Zeitpunkt  $t = 10 \text{ s}$  ist die Geschwindigkeit um  $\boxed{\phantom{00}}$  m/s größer als zum Zeitpunkt  $t = 0 \text{ s}$ .

3.9

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  fährt ein PKW mit der Geschwindigkeit  $v_0 = 10$  m/s.

Ein Messgerät zeichnet die Beschleunigung  $a$  des PKWs in den folgenden 30 Sekunden auf.

Das Ergebnis der Messung ist rechts dargestellt.



a) Schätze mithilfe der Abbildung den Wert von  $\int_0^{30} a(t) dt$  ab.

Trage den Schätzwert inkl. Einheit in die folgenden Kästchen ein:

$$\int_0^{30} a(t) dt \approx \underbrace{\quad}_{\text{Maßzahl}} \underbrace{\quad}_{\text{Einheit}}$$

b) Die zugehörige Weg-Zeit-Funktion ist  $s$ . Die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion ist  $v$ .

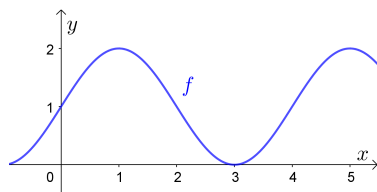
Kreuze jenen Term an, der zu  $\int_0^{30} a(t) dt$  äquivalent ist.

- $s(30) - s(0)$   
   $v(30) - v(0)$   
   $a(30) - a(0)$   
   $\frac{s(30) - s(0)}{30\text{s}}$   
   $\frac{v(30) - v(0)}{30\text{s}}$   
   $\frac{a(30) - v(0)}{30\text{s}}$

c) Interpretiere den Schätzwert inkl. Einheit im gegebenen Sachzusammenhang.

3.10

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$  ist dargestellt.



a) Markiere eine Fläche mit Inhalt  $A = \int_0^4 f(x) dx$ .

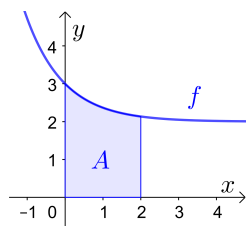
b) Ermittle die Gleichung einer Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

c) Kreuze den richtigen Wert von  $A$  an.

- $A = 3$   
   $A = \pi$   
   $A = 4 - \frac{2}{\pi}$   
   $A = 4$   
   $A = 5$

3.11

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = 2 + e^{-x}$  ist dargestellt.

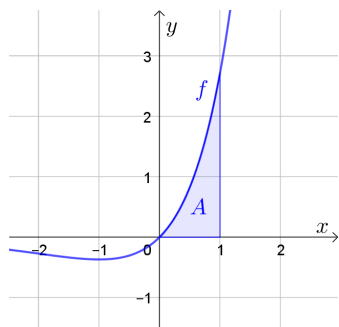


a) Ermittle die Gleichung einer Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

b) Kreuze den richtigen Wert von  $A = \int_0^2 f(x) dx$  an.

- $A = 4$   
   $A = e^2 - 5$   
   $A = 5 - \frac{1}{e^2}$   
   $A = 5$   
   $A = 5 - e^2$

3.12



Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x \cdot e^x$  ist dargestellt.

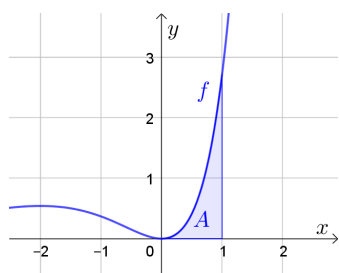
- a) Ermittle mithilfe der Ableitungsregeln eine Gleichung von  $f'$ .
- b) Trage den fehlenden Term in das Kästchen ein:

$$f(x) = f'(x) - \boxed{\phantom{000000}}$$

- c) Ermittle mithilfe von **2)** eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .
- d) Berechne  $A = \int_0^1 x \cdot e^x dx$  mithilfe von **3)**.

3.13

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2 \cdot e^x$  ist dargestellt.



- a) Ermittle mithilfe der Ableitungsregeln eine Gleichung von  $f'$ .
- b) Trage den fehlenden Term in das Kästchen ein:

$$f(x) = f'(x) - \boxed{\phantom{000000}}$$

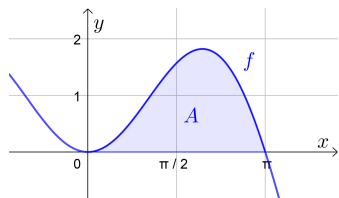
Es gilt:  $\int_0^1 x \cdot e^x dx = 1$

- c) Berechne  $A = \int_0^1 x^2 \cdot e^x dx$  mithilfe von **2)**, und kreuze an.

- $A = \frac{1}{2}$      $A = 4 - e$      $A = 1$      $A = e - 2$      $A = e^2 - 1$

3.14

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x \cdot \sin(x)$  ist dargestellt.



- a) Ermittle mithilfe der Ableitungsregeln jeweils eine Gleichung von  $f'$  und  $f''$ .
- b) Trage den fehlenden Term in das Kästchen ein:

$$f(x) = \boxed{\phantom{000000}} - f''(x)$$

- c) Ermittle mithilfe von **2)** eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

- d) Berechne  $A = \int_0^\pi x \cdot \sin(x) dx$  mithilfe von **3)**, und kreuze an.

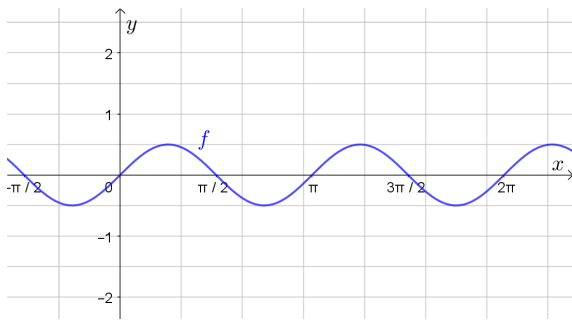
- $A = 3$      $A = \pi$      $A = \frac{3}{2} \cdot \pi$      $A = 4$      $A = \frac{4}{3} \cdot \pi$





**3.15**

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$  ist dargestellt.



a) Es gibt genau eine Zahl  $c \in \mathbb{R}$ , sodass

$$f(x) = c \cdot f''(x)$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt. Berechne  $c$ .

b) Ermittle mithilfe von 1) eine Stammfunktion  $F$  von  $f$ .

c) Berechne  $\int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \cos(x) dx$  mithilfe von 2).

d) Skizziere links den Funktionsgraphen von  $f''$ .

**3.16**

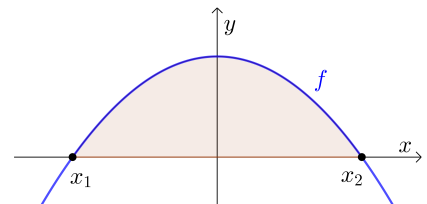


Der Graph der quadratischen Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{a^2 - x^2}{a^3}$  ist für eine positive Zahl  $a$  dargestellt.

a) Stelle mithilfe von  $a$  eine Formel für die beiden Nullstellen von  $f$  auf.

$$x_1 = \boxed{\phantom{000000}} \quad x_2 = \boxed{\phantom{000000}}$$

b) Zeige, dass der Inhalt der markierten Fläche *nicht* von  $a$  abhängt.



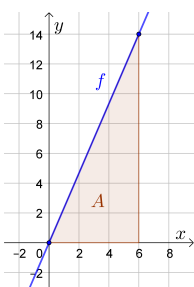
**3.17**



Berechne jene Zahl  $a \in \mathbb{R}$ , für die

$$\int_0^6 a \cdot x \cdot (x - a) dx$$

maximal ist.



3.1 a)  $b) 42$  c)  $A = \frac{7}{6} \cdot x^2 \Big|_0^6 = 42$

3.2 a) 46 b) 42 c)  $\approx 10\%$

3.3 a) 6 b) 9 c) 4 d) -2

(Im Intervall [1; 5] schließt der Graph von  $f$  mit der  $x$ -Achse eine größere Fläche unterhalb als oberhalb ein.)

3.4 a) 12 b) -6 c) 6 d) 21

3.5 a) 16 b) 182

3.6 a) 0 b) 4

3.7 a)  $F = 26 \text{ m/s}$  b) Zum Zeitpunkt  $t = 4$  ist die Geschwindigkeit um  $26 \text{ m/s}$  größer als zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

c)  $v(t) = -\frac{3}{8} \cdot t^2 + 8 \cdot t + 3$  ( $t$  in Sekunden,  $v(t)$  in  $\text{m/s}$ )

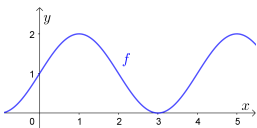
3.8 a)  $t = 4 \text{ s}$  b)  $t = 0 \text{ s}$  c)  $t = 5 \text{ m/s}$

3.9 a)  $\int_0^{30} a(t) dt \approx -8 \text{ m/s}$  (Toleranzbereich:  $[-9 \text{ m/s}; -7 \text{ m/s}]$ )

b)  $v(30) - v(0)$

c) Zum Zeitpunkt  $t = 30 \text{ s}$  ist der PKW um rund  $8 \text{ m/s}$  langsamer als zum Zeitpunkt  $t = 0$ .

Oder: Zum Zeitpunkt  $t = 30 \text{ s}$  beträgt die Geschwindigkeit des PKWs rund  $2 \text{ m/s}$ .



3.10 a)  $b) F(x) = x - \frac{2}{\pi} \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot x)$  c)  $A = 4$

3.11 a)  $F(x) = 2 \cdot x - e^{-x}$  b)  $A = 5 - \frac{1}{e^2}$

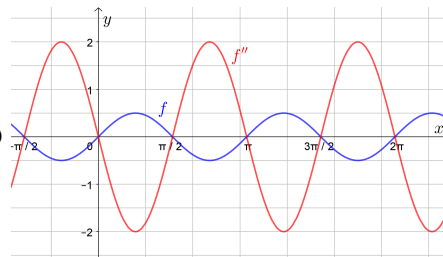
3.12 a)  $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$  b)  $f(x) = f'(x) - e^x$  c) Zum Beispiel:  $F(x) = f(x) - e^x$  d)  $A = 1$

3.13 a)  $f'(x) = 2 \cdot x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$  b)  $f(x) = f'(x) - 2 \cdot x \cdot e^x$  c)  $A = e - 2$

3.14 a)  $f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x)$   $f''(x) = 2 \cdot \cos(x) - x \cdot \sin(x)$  b)  $f(x) = 2 \cdot \cos(x) - f''(x)$

c) Zum Beispiel:  $F(x) = \sin(x) - x \cdot \cos(x)$  d)  $A = \pi$

3.15 a)  $c = -\frac{1}{4}$  b) Zum Beispiel:  $F(x) = \frac{1}{4} \cdot \sin^2(x) - \frac{1}{4} \cdot \cos^2(x)$  c)  $\frac{1}{2}$



3.16 a)  $x_1 = -a, x_2 = a$  b)  $\int_{-a}^a f(x) dx = \dots = \frac{4}{3}$

3.17  $a = 2$

4. FLÄCHENINHALTE ZWISCHEN FUNKTIONSGRAPHEN

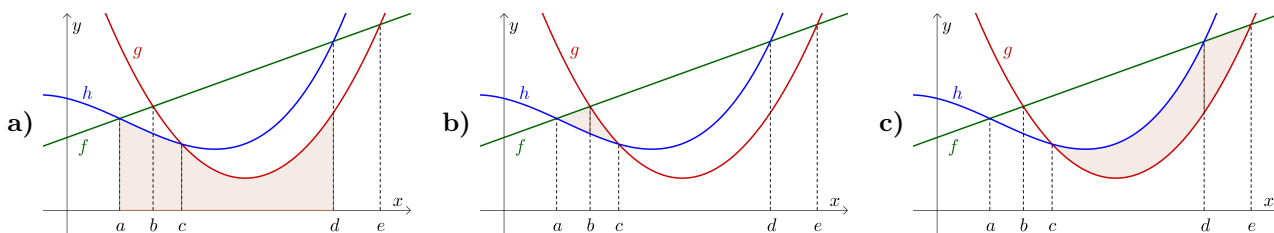


Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen](#)

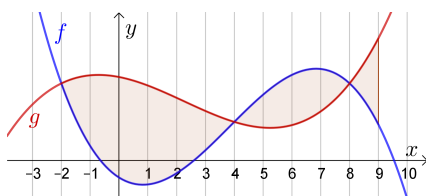
4.1

Stelle mithilfe von  $f$ ,  $g$  und  $h$  eine Formel zur Berechnung des Inhalts der markierten Fläche auf.



4.2

Stelle mithilfe von  $f$  und  $g$  eine Formel zur Berechnung des Inhalts der markierten Fläche auf.



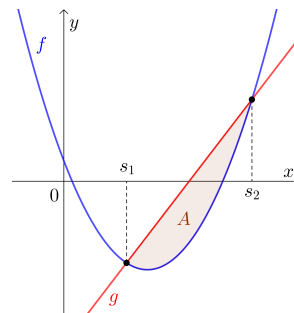
4.3

Die Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  sind dargestellt.

Für die quadratische Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1$

Für die lineare Funktion  $g$  gilt:  $g(x) = 4 \cdot x - 8$

- a) Berechne die eingezeichneten Schnittstellen  $s_1$  und  $s_2$ .
- b) Berechne den Inhalt  $A$  der markierten Fläche.



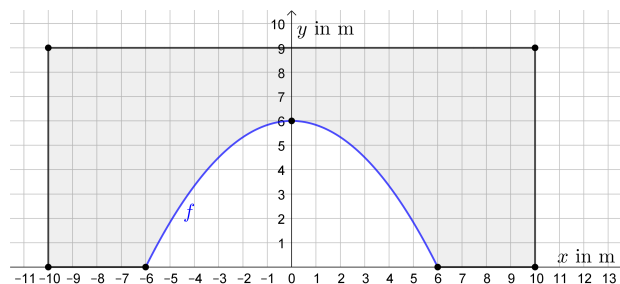
4.4

Das Profil einer Brücke ist dargestellt.

Für die Funktion  $f$  gilt:

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

- a) Ermittle die Koeffizienten  $a$ ,  $b$  und  $c$ .
- b) Berechne den Inhalt der grau markierten Fläche.



4.5

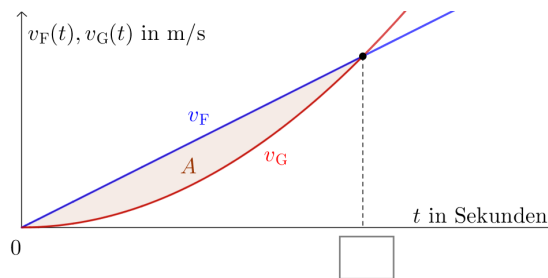
Filip und Gerlinde veranstalten ein Wettrennen. Rechts sind die Graphen ihrer Geschwindigkeit-Zeit-Funktionen  $v_F$  bzw.  $v_G$  dargestellt. Dabei gilt:

$$v_F(t) = \frac{1}{2} \cdot t \quad \text{bzw.} \quad v_G(t) = \frac{1}{10} \cdot t^2$$

$t$  ... Zeit in Sekunden

$v_F(t)$  ... Filips Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt  $t$

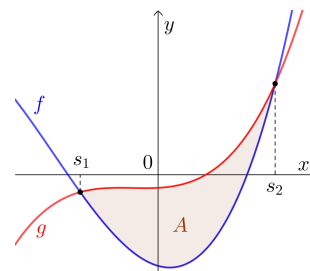
$v_G(t)$  ... Gerlindes Geschwindigkeit in m/s zum Zeitpunkt  $t$



- a) Berechne die positive Schnittstelle der beiden Graphen. Trage diesen Zeitpunkt in das Kästchen in der Abbildung oben ein.
- b) Stelle mithilfe von  $v_F$  und  $v_G$  eine Formel zur Berechnung des Inhalts  $A$  der oben markierten Fläche auf.
- c) Es gilt:  $A \approx 2,083$   Trage die richtige Einheit in das Kästchen ein. Interpretiere den Wert von  $A$  im gegebenen Sachzusammenhang.

4.6

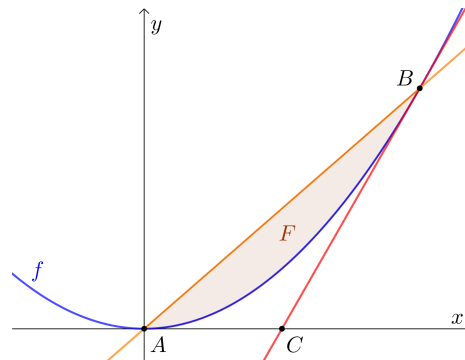
Die Graphen zweier Funktionen  $f$  und  $g$  sind dargestellt. Für die kubische Funktion  $f$  gilt:  $f(x) = x^3 + 8 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 42$  Für die kubische Funktion  $g$  gilt:  $g(x) = x^3 + 2 \cdot x^2 + x - 6$



- a) Berechne die eingezeichneten Schnittstellen  $s_1$  und  $s_2$ .
- b) Berechne den Inhalt  $A$  der markierten Fläche.

4.7

Der Graph der Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^2$  ist dargestellt.  $A = (0 | 0)$  ist der Koordinatenursprung.  $B = (2 | y_B)$  ist ein Punkt am Funktionsgraphen von  $f$ .  $C$  ist der Schnittpunkt der Tangente in  $B$  mit der  $x$ -Achse. Eine Fläche mit Inhalt  $F$  ist rechts markiert. Noah behauptet: „Der Flächeninhalt vom Dreieck  $ABC$  ist um 50% größer als  $F$ .“



- a) Berechne  $y_B$ .
- b) Stelle eine Gleichung der Tangente in  $B$  auf.
- c) Berechne die Koordinaten von  $C$ .
- d) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .
- e) Stelle eine Gleichung der Gerade durch  $A$  und  $B$  auf.
- f) Berechne den Flächeninhalt  $F$ .
- g) Zeige, dass Noahs Behauptung für diesen Punkt  $B$  stimmt.
- ★ Zeige, dass Noahs Behauptung für jeden Punkt  $B$  am Funktionsgraphen von  $f$  stimmt.



4.8

Für die Funktionen  $\sinh$  (*Sinus hyperbolicus*) und  $\cosh$  (*Cosinus hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

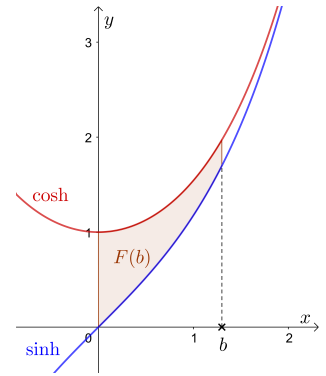
a) Vereinfache den Term  $\cosh(x) - \sinh(x)$  so weit wie möglich.

Begründe damit, warum  $\cosh(x) > \sinh(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt.

Die Graphen der beiden Funktionen schließen im Intervall  $[0; b]$  eine Fläche mit Inhalt  $F(b)$  ein.

b) Stelle mithilfe von  $b$  eine Formel für  $F(b)$  auf.

c) Ermittle den Grenzwert  $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$ .



- 4.1 a)  $\int_a^c h(x) dx + \int_c^d g(x) dx$     b)  $\int_a^b (f(x) - h(x)) dx + \int_b^c (g(x) - h(x)) dx$     c)  $\int_c^d (h(x) - g(x)) dx + \int_d^e (f(x) - g(x)) dx$
- 4.2  $\int_{-2}^4 (g(x) - f(x)) dx + \int_4^8 (f(x) - g(x)) dx + \int_8^9 (g(x) - f(x)) dx$
- 4.3 a)  $s_1 = 1, s_2 = 3$     b)  $A = 4$
- 4.4 a)  $a = -\frac{1}{6}, b = 0, c = 6$     b)  $132 \text{ m}^2$
- 4.5 a) 5    b)  $A = \int_0^5 (v_F(t) - v_G(t)) dt$     c)  $A \approx 2,083 \text{ m}$  Filip hat im Zeitintervall  $[0; 5]$  um rund 2,083 m mehr zurückgelegt als Gerlinde.
- 4.6 a)  $s_1 = -2, s_2 = 3$     b)  $A = 125$
- 4.7 a)  $y_B = 4$     b)  $y = 4 \cdot x - 4$     c)  $C = (1 | 0)$     d) 2    e)  $y = 2 \cdot x$     f)  $F = \frac{4}{3}$     g)  $\frac{2}{F} = \frac{3}{2} = 1,5$   
 Der Flächeninhalt des Dreiecks ist also um 50% größer als  $F$ .  
 Allgemeine Ergebnisse mit  $B = (b | b^2)$ :  
 a)  $y_B = b^2$     b)  $y = 2 \cdot b \cdot x + b^2$     c)  $C = (\frac{b}{2} | 0)$     d)  $\frac{b^3}{4}$     e)  $y = b \cdot x$     f)  $F = \frac{b^3}{6}$     g)  $\frac{3}{2} \cdot \frac{b^3}{6} = \frac{b^3}{4} \checkmark$
- 4.8 a)  $\cosh(x) - \sinh(x) = e^{-x} > 0 \implies \cosh(x) > \sinh(x)$     b)  $1 - e^{-b}$     c) 1

5. NORMALVERTEILUNG

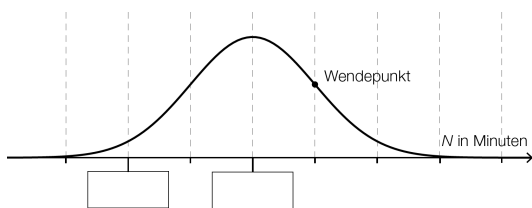


Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Normalverteilung](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Verteilungsfunktionen](#)

5.1

Eine Studie besagt, dass die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer  $N$  von Jugendlichen annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt 180 Minuten und die Standardabweichung 20 Minuten. Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



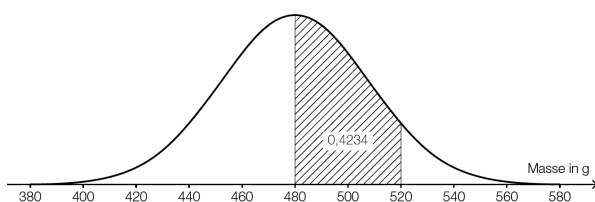
- 1) Tragen Sie die fehlenden Zeiten in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.
- 2) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig ausgewählte Person der untersuchten Altersgruppe die durchschnittliche tägliche Internet-Nutzungsdauer 200 Minuten oder weniger beträgt.

5.2

Eine Pizzeria liefert Pizzen auf Bestellung aus. Die Kunden sollen möglichst schnell beliefert werden, damit die Pizzen bei der Zustellung noch heiß sind.

Die Masse der Pizzen ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = 480$  g.

In der nachstehenden Darstellung der Dichtefunktion ist diejenige Fläche markiert, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass die Masse einer zufällig ausgewählten Pizza zwischen 480 g und 520 g liegt.



- 1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Pizza eine Masse von mindestens 520 g hat.

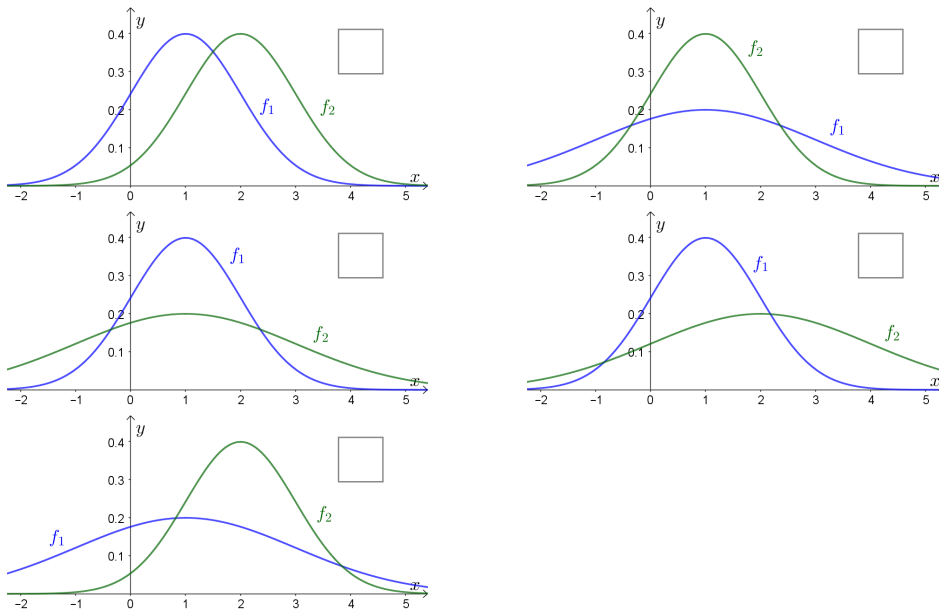
5.3

Die Zufallsvariable  $X_1$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu_1$  und Standardabweichung  $\sigma_1$ .  
 Die Zufallsvariable  $X_2$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu_2$  und Standardabweichung  $\sigma_2$ .

- A: Es gilt  $\mu_1 = \mu_2$  und  $\sigma_1 < \sigma_2$ .
- B: Es gilt  $\mu_1 = \mu_2$  und  $\sigma_1 > \sigma_2$ .
- C: Es gilt  $\mu_1 < \mu_2$  und  $\sigma_1 = \sigma_2$ .
- D: Es gilt  $\mu_1 < \mu_2$  und  $\sigma_1 < \sigma_2$ .
- E: Es gilt  $\mu_1 < \mu_2$  und  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

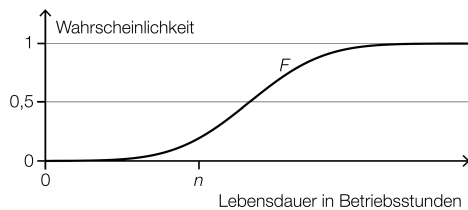
Die zu  $X_1$  gehörige Dichtefunktion ist  $f_1$ . Die zu  $X_2$  gehörige Dichtefunktion ist  $f_2$ .

Ordne **A**, **B**, **C**, **D** und **E** den 5 Abbildungen zu. Trage jeweils den richtigen Buchstaben in das Kästchen ein.



5.4

In einem Labor werden Bohrmaschinen eines bestimmten Modells einem Langzeittest unterzogen.  
 Die Lebensdauer dieser Bohrmaschinen ist annähernd normalverteilt.  
 In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$  dargestellt.



Die zugehörige Dichtefunktion wird mit  $f$  bezeichnet.

1) Veranschaulichen Sie in der obigen Abbildung die Wahrscheinlichkeit  $\int_{-\infty}^n f(x) dx$ .

2) Beschreiben Sie ein Ereignis  $E$  im gegebenen Sachzusammenhang, für dessen Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P(E) = 1 - F(n)$$

5.5

Die Körpergröße  $X$  von 42-jährigen Männern ist annähernd normalverteilt.

a) Die zugehörige Dichtefunktion ist  $f$ .

Interpretiere das Ergebnis der Rechnung im gegebenen Sachzusammenhang.

i)  $\int_{-\infty}^{170} f(x) dx \approx 0,191$     ii)  $\int_{185}^{\infty} f(x) dx \approx 0,119$     iii)  $\int_{170}^{175} f(x) dx \approx 0,223$

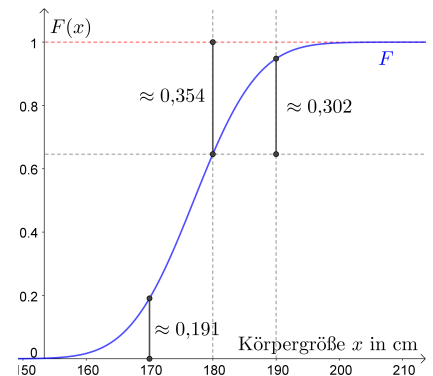
b) In der Abbildung rechts ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion  $F$  dargestellt.

In dieser Abbildung sind auch 3 Strecken eingezeichnet und mit ihren Längen beschriftet.

1) Wie kann man diese Streckenlängen mithilfe von  $F$  berechnen?

Trage jeweils einen passenden Ausdruck in das Kästchen ein:

	$\approx 0,191$
	$\approx 0,354$
	$\approx 0,302$



2) Interpretiere die 3 Streckenlängen im gegebenen Sachzusammenhang.

5.6

Die Zufallsvariable  $X$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu = 8$  und Standardabweichung  $\sigma = 3$ .

Die zugehörige Dichtefunktion ist  $f$ . Die zugehörige Verteilungsfunktion ist  $F$ .

Trage Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Aussage richtig ist.

a)  $P(X \geq \boxed{\phantom{00}}) = 50\%$

b)  $P(X \leq 6) = P(X \geq \boxed{\phantom{00}})$

c)  $P(X = 8) = \boxed{\phantom{00}}\%$

d) Die Dichtefunktion  $f$  hat an der Stelle  $x = \boxed{\phantom{00}}$  ein lokales Maximum.

e) Die Dichtefunktion  $f$  wechselt an den Stellen  $x_1 = \boxed{\phantom{00}}$  und  $x_2 = \boxed{\phantom{00}}$  ihr Krümmungsverhalten ( $x_1 < x_2$ ).

f) Die Verteilungsfunktion  $F$  wechselt an der Stelle  $x = \boxed{\phantom{00}}$  ihr Krümmungsverhalten.

g) Der Graph der Verteilungsfunktion  $F$  enthält den Punkt  $(8 | \boxed{\phantom{00}})$

h) Für die Dichtefunktion  $f$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{\phantom{00}}$

i) Für die Verteilungsfunktion  $F$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \boxed{\phantom{00}}$  bzw.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \boxed{\phantom{00}}$

j) Die Wendetangente von  $F$  hat die Steigung  $f(\boxed{\phantom{00}})$ .



5.7

Die Zufallsvariable  $X_1$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu_1 = 3$  und Standardabweichung  $\sigma_1$ .

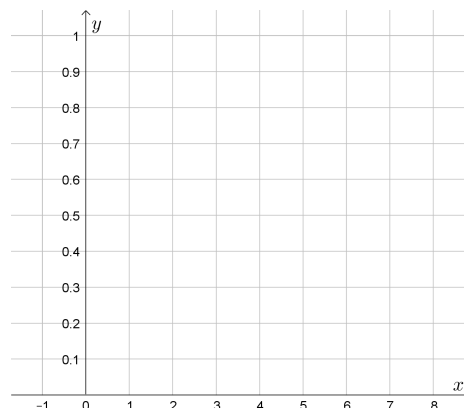
Die Zufallsvariable  $X_2$  ist normalverteilt mit Erwartungswert  $\mu_2 = 3$  und Standardabweichung  $\sigma_2$ .

Weiters gilt:  $\sigma_1 < \sigma_2$

$F_1$  ist die Verteilungsfunktion von  $X_1$ .

$F_2$  ist die Verteilungsfunktion von  $X_2$ .

Skizziere jeweils einen möglichen Funktionsgraphen von  $F_1$  und von  $F_2$  im nebenstehenden Koordinatensystem.



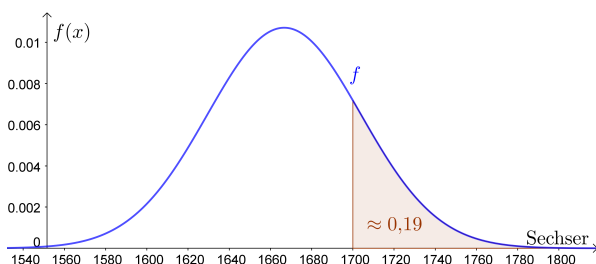
5.8

Ein Zufallsgenerator simuliert  $n = 10\,000$  Würfe mit einem gewöhnlichen Spielwürfel. Bei jedem Wurf ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser also – unabhängig von den bisherigen Würfeleregebnissen – genau  $p = \frac{1}{6}$ .

Die Anzahl der Sechser unter den 10 000 Würfeln ist dann binomialverteilt mit den Parametern  $n$  und  $p$ .

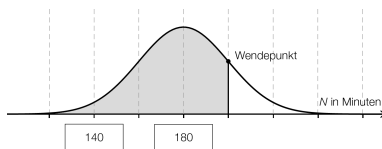
Die Anzahl der Sechser unter den 10 000 Würfeln ist *näherungsweise* normalverteilt mit dem Erwartungswert  $\mu = n \cdot p = 1666,6\dots$  und der Standardabweichung  $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 37,26\dots$

Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion  $f$  ist dargestellt:



Interpretiere den markierten Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang.

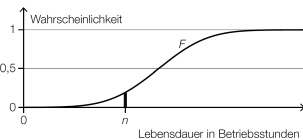
5.1



5.2 7,66 %

5.3 Von oben nach unten: Linke Spalte: C, A, E Rechte Spalte: B, D

5.4 1)

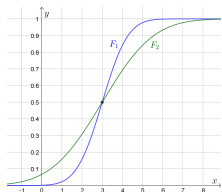


2) Ereignis E: Die Lebensdauer einer Bohrmaschine beträgt mindestens (bzw. mehr als)  $n$  Betriebsstunden.

- 5.5 a) i) Die WS, dass ein 42-jähriger Mann höchstens 170 cm groß ist, beträgt rund 19,1 %.  
 ii) Die WS, dass ein 42-jähriger Mann mindestens 185 cm groß ist, beträgt rund 11,9 %.  
 iii) Die WS, dass ein 42-jähriger Mann zwischen 170 cm und 175 cm groß ist, beträgt rund 22,3 %.
- b) 1)  $F(170) \approx 0,191$   $1 - F(180) \approx 0,354$   $F(190) - F(180) \approx 0,302$   
 2) Die WS, dass ein 42-jähriger Mann höchstens 170 cm groß ist, beträgt rund 19,1 %.  
 Die WS, dass ein 42-jähriger Mann mindestens 180 cm groß ist, beträgt rund 35,4 %.  
 Die WS, dass ein 42-jähriger Mann zwischen 180 cm und 190 cm groß ist, beträgt rund 30,2 %.

5.6 a) 8 b) 10 c) 0 d) 8 e) 5 und 11 f) 8 g) 0,5 h) 0 bzw. 0 i) 1 bzw. 0 j) 8

5.7



5.8 Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 10 000 Würfeln mindestens 1700 Sechser würfelt, beträgt rund 19 %.