# AUFGABENSAMMLUNG – TRIGONOMETRIE

Inhaltsverzeichnis



**Unterrichtsmaterialien – Trigonometrie**

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck
- ✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis
- ✓ Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Goniometrische Gleichungen
- ✓ Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck
- ✓ Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen

**Wie darf ich die Aufgaben verwenden?**



Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

*Datum:* 29. Mai 2024

## 1. Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

MmF-Materialien MmF

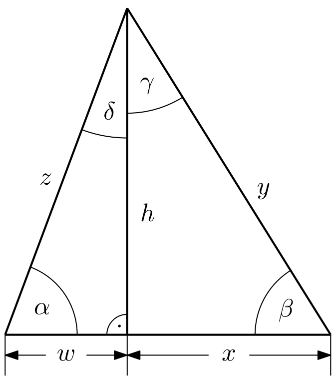
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

### 1.1

Trage die richtigen Seitenlängen $w$, $x$, $y$, $z$, $h$ in die Kästchen ein.




$\sin(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\sin(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\sin(\gamma) = \frac{\square}{\square}$ $\sin(\delta) = \frac{\square}{\square}$

$\cos(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\gamma) = \frac{\square}{\square}$ $\cos(\delta) = \frac{\square}{\square}$

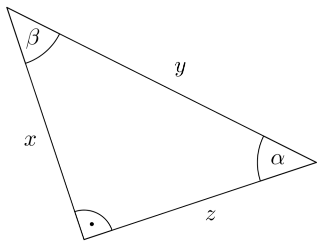
$\tan(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\gamma) = \frac{\square}{\square}$ $\tan(\delta) = \frac{\square}{\square}$

### 1.2

Rechts ist ein rechtwinkeliges Dreieck dargestellt.

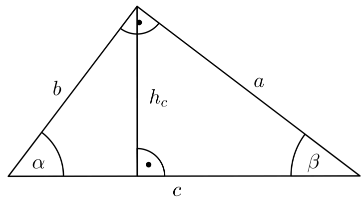
**a)** Es gilt: $\alpha = 48°$, $x = 50\,\text{cm}$
Berechne $y$, $z$ und $\beta$.

**b)** Es gilt: $x = 74\,\text{cm}$, $y = 1{,}8\,\text{m}$
Berechne $z$, $\alpha$ und $\beta$.



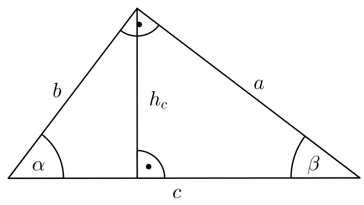

### 1.3

Vom dargestellten Dreieck sind $a = 7\,\text{cm}$ und $b = 4\,\text{cm}$ bekannt.
Berechne die Längen $c$ und $h_c$, die Winkel $\alpha$ und $\beta$ und den Flächeninhalt $A$.



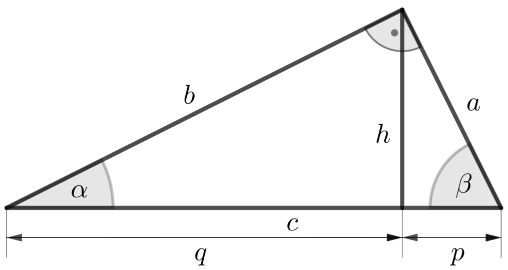
## 1.4

Vom dargestellten Dreieck sind $\alpha = 65°$ und $h_c = 22\,\text{m}$ bekannt.
Berechne die Längen $a$, $b$ und $c$, den Winkel $\beta$ und den Flächeninhalt $A$.




## 1.5

Berechne jeweils die fehlenden Seiten und Innenwinkel zu den Angaben des rechtwinkeligen Dreiecks.




**a)** $p = 4{,}93\,\text{cm},\ \beta = 70{,}3°$

**b)** $p = 28\,\text{cm},\ q = 63\,\text{cm}$

**c)** $a = 12{,}5\,\text{cm},\ p = 4{,}4\,\text{cm}$

**d)** $h = 9{,}1\,\text{cm},\ q = 6\,\text{cm}$

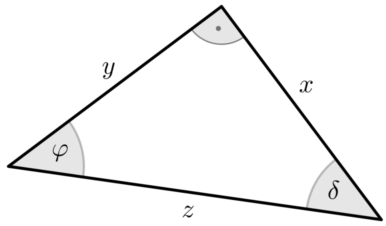
**e)** $a = 27{,}8\,\text{cm},\ A = 373\,\text{cm}^2$

**f)** $a : b = 3 : 4,\ u = 60\,\text{cm}$

## 1.6

Kreuze jeweils alle auf das gegebene Dreieck zutreffenden Aussagen an.

**a)**



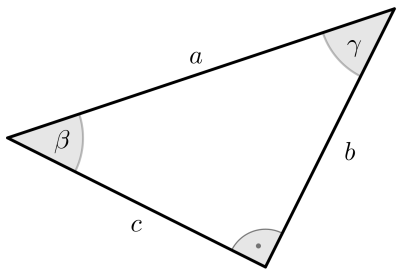

☐ $\sin(\varphi) = \frac{x}{y}$ ☐ $\cos(\varphi) = \frac{x}{y}$

☐ $\sin(\varphi) = \frac{x}{z}$ ☐ $\sin(\delta) = \frac{y}{z}$

☐ $\sin(\varphi) = \frac{y}{z}$ ☐ $\tan(\varphi) = \frac{x}{y}$

☐ $\cos(\delta) = \frac{x}{z}$ ☐ $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$

**b)**




☐ $a^2 + b^2 = c^2$ ☐ $a^2 = b^2 + c^2$

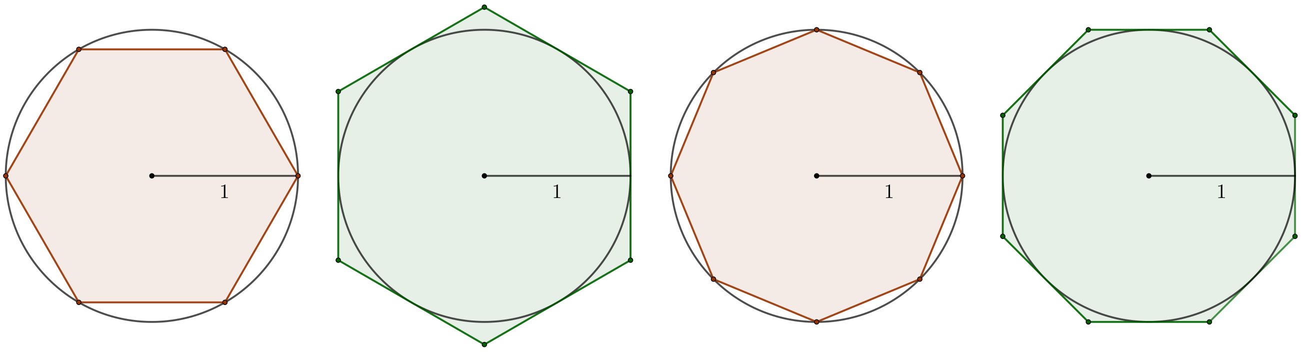
☐ $\sin(\beta) = \cos(\gamma)$ ☐ $\sin(\gamma) = \cos(\beta)$

☐ $\beta = 90° - \gamma$ ☐ $[\sin(\beta)]^2 + [\cos(\gamma)]^2 = 1$

☐ $A = \frac{a \cdot b}{2}$ ☐ $A = \frac{b \cdot c}{2}$

**1.7**

Die Kreisfläche wird durch regelmäßige Vielecke angenähert.

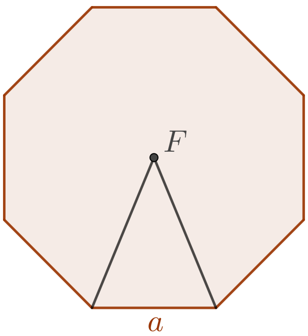



Berechne jeweils, um wie viel Prozent der Flächeninhalt des Vielecks vom Flächeninhalt des Kreises abweicht.

„Prozentueller Fehler“

**1.8**

Eine regelmäßige 8-seitige Pyramide hat ein regelmäßiges 8-Eck als Grundfläche. Der Fußpunkt $F$ der Höhe ist der Mittelpunkt der Grundfläche.

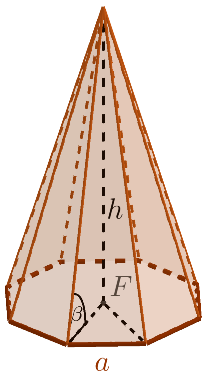



Die dargestellte regelmäßige 8-seitige Pyramide hat die Basiskantenlänge $a = 5\,\text{cm}$ und die Höhe $h = 42\,\text{cm}$.

**a)** Berechne den Inhalt der Grundfläche.

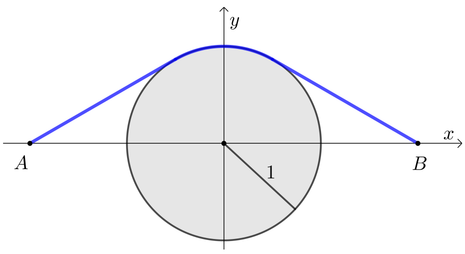
**b)** Berechne das Volumen der Pyramide in Liter.

**c)** Berechne den Winkel $\beta$, unter dem die Seitenkanten zur Grundfläche geneigt sind.




**1.9**

Michael möchte auf kürzestem Weg vom Punkt $A = (-2 \mid 0)$ zum Punkt $B = (2 \mid 0)$ kommen.




Das kreisförmige Loch mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 1 kann Michael dabei nicht durchqueren.

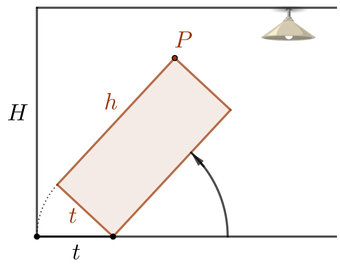
Wie lang ist der kürzeste Weg?

**1.10**

Teddy stellt einen Kühlschrank mit Höhe $h = 230\,\text{cm}$ und Tiefe $t = 78\,\text{cm}$ auf.

Beim Aufstellen hat der eingezeichnete Eckpunkt $P$ von allen Punkten am Kühlschrank stets die größte Höhe über dem Boden.

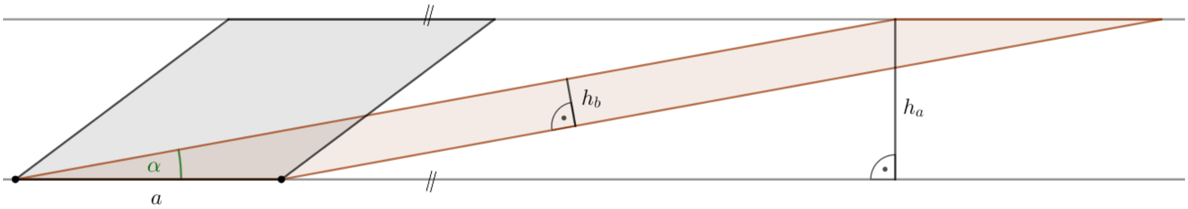
Wie groß muss der eingezeichnete Kippwinkel sein, damit $P$ die maximale Höhe hat?




**1.11**

**a)** Begründe, warum die beiden unten dargestellten Parallelogramme den gleichen Flächeninhalt haben.

**b)** Berechne $h_b$ für $a = 7\,\text{cm}$ und $\alpha = 15°$ .



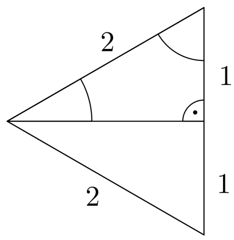

**1.12**

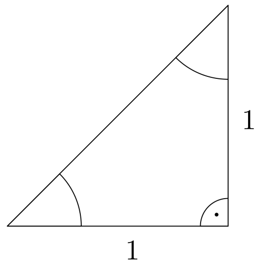
Für die Winkel 30°, 45° und 60° kannst du die Werte der Winkelfunktionen auch ohne Taschenrechner ermitteln. Dabei helfen die beiden rechts dargestellten Dreiecke.

**a)** Ermittle (ohne TR) die Winkel und Seitenlängen in den beiden Dreiecken. Beschrifte rechts die beiden Dreiecke. (Die Ergebnisse dürfen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ enthalten.)

**b)** Fülle die nachstehende Tabelle (ohne TR) aus.

| | $\alpha = 30°$ | $\alpha = 45°$ | $\alpha = 60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | | | |
| $\cos(\alpha)$ | | | |
| $\tan(\alpha)$ | | | |



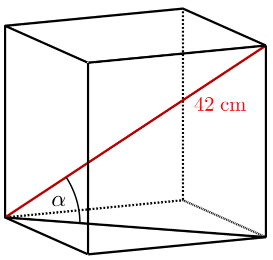

**1.13**

Von einem spitzen Winkel $\alpha$ weiß man, dass $\tan(\alpha) = {}^5/_{12}$ gilt. Ermittle $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$.

**1.14**

Durch jeden Eckpunkt eines Würfels gehen drei Flächendiagonalen und eine Raumdiagonale. Unter welchen Winkeln schneiden sich je zwei dieser Diagonalen?

**1.15**

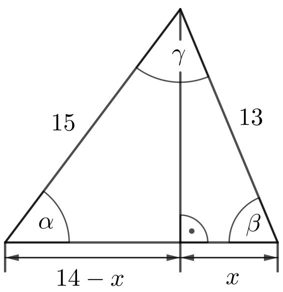



Links ist ein Würfel dargestellt, dessen Raumdiagonalen 42 cm lang sind.

**a)** Berechne die Oberfläche des Würfels.

**b)** Berechne den links eingezeichneten Winkel $\alpha$, den die Raumdiagonale und die Flächendiagonale einschließen.

**1.16**




Links ist ein Dreieck mit Seitenlängen 13, 14 und 15 dargestellt.

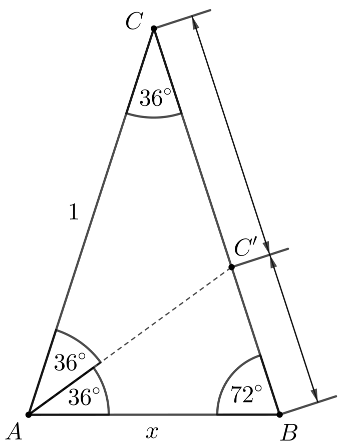
**a)** Berechne die Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$.

Hinweis: Berechne zuerst die Höhe auf zwei Arten mit dem Satz von Pythagoras.

**b)** Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

**1.17**

In dieser Aufgabe ermittelst du $\sin(72°)$ und $\cos(72°)$ ohne Taschenrechner:




Das Dreieck $ABC$ ist gleichschenkelig mit Schenkellänge 1 und Basiswinkel 72°. Links ist die Winkelsymmetrale $AC'$ eingezeichnet.

**a)** Die Basis $AB$ hat Länge $x$. Beschrifte die Strecken $AC'$, $CC'$ und $BC'$ mit ihren Längen in Abhängigkeit von $x$.

**b)** Begründe, warum die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle ABC'$ ähnlich sind.

**c)** Zeige, dass $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ gilt.

**d)** Zeige, dass $\cos(72°) = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ gilt.

**e)** Zeige, dass $\sin(72°) = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+5}{8}}$ gilt.

**1.18**

Gegeben ist eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche, bei der alle Kanten die Länge $a$ haben („Tetraeder“).

**a)** Stelle mithilfe von $a$ eine Formel für die Oberfläche dieser Pyramide auf.

**b)** Stelle mithilfe von $a$ eine Formel für das Volumen dieser Pyramide auf.

Hinweis: Der Schwerpunkt eines Dreiecks teilt die Schwerlinien im Verhältnis 2 : 1.

**c)** Wie groß ist der Winkel, den zwei Begrenzungsflächen einschließen?

**1.19**

Gegeben ist eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche, bei der alle Kanten die Länge $a$ haben.

**a)** Stelle mithilfe von $a$ eine Formel für die Oberfläche dieser Pyramide auf.

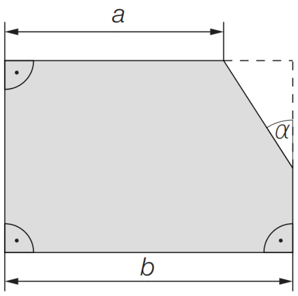
**b)** Stelle mithilfe von $a$ eine Formel für das Volumen dieser Pyramide auf.

**c)** Unter welchem Winkel schneiden jeweils eine Mantelfläche und die Grundfläche dieser Pyramide einander?

**d)** Unter welchem Winkel schneiden zwei benachbarte Mantelflächen dieser Pyramide einander?

**1.20**

Ein Industriebetrieb erwägt die Erweiterung seiner Produktpalette.



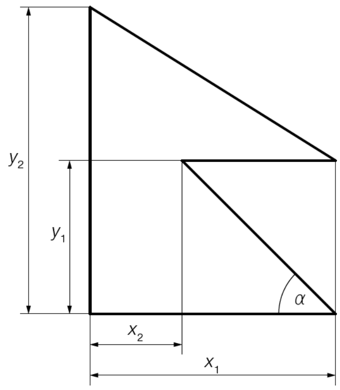

Die Produktion des neuen Produktes erfordert Umbauarbeiten. Wegen einer neuen Zufahrtsstraße wird von der rechts dargestellten Fläche ein dreieckiger Abschnitt abgetrennt.
Die Größen $a$, $b$ und $\alpha$ sind bekannt.

**1)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts $A$ dieser dreieckigen Fläche aus den gegebenen Größen.

$A =$ ______________________________

**1.21**

Die Flagge von Nepal hat die nebenstehende Form.




**1)** Erstellen Sie mithilfe von $x_1$, $x_2$ und $y_1$ eine Formel zur Berechnung von $\alpha$.

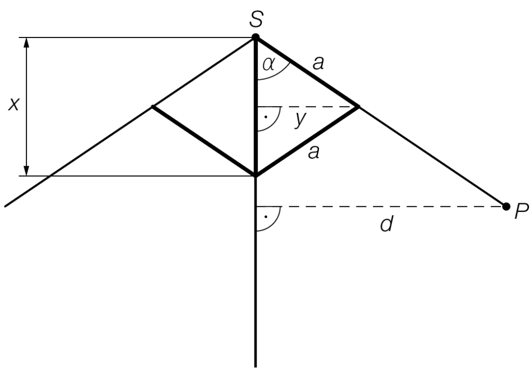
$\alpha =$ ______________________________

**2)** Kennzeichnen Sie denjenigen Winkel $\beta$, für den der folgende Zusammenhang gilt:

$$\sin(\beta) = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

**1.22**

In der nebenstehenden Abbildung ist ein geöffneter Sonnenschirm schematisch dargestellt.




**1)** Stellen Sie mithilfe von $a$ und $x$ eine Formel zur Berechnung des Abstands $y$ auf.

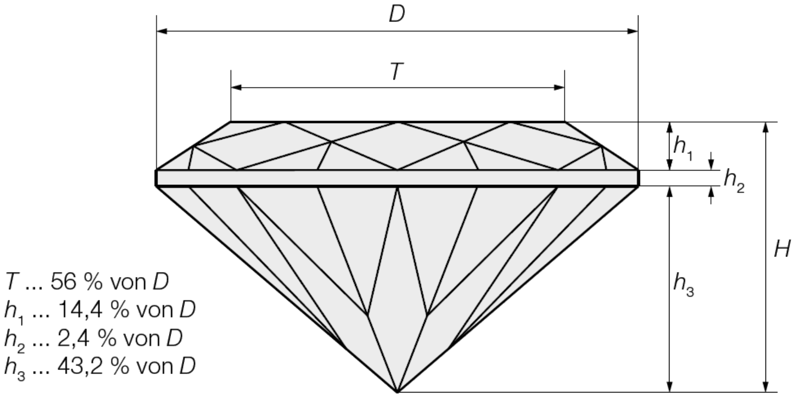
$y =$ ______________________________

**2)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$ für $x = 20\,\text{cm}$ und $a = 41\,\text{cm}$.

**1.23**



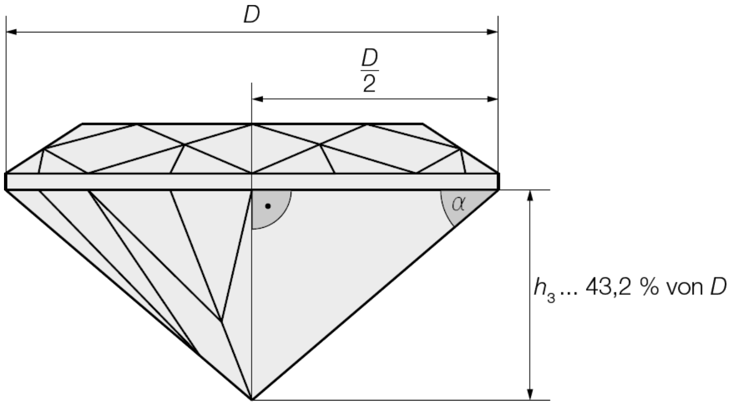
Die nachstehende Abbildung zeigt schematisch einen geschliffenen Diamanten.




**1)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von $H$ aus $T$.

$H =$ ______________________________

Der in der nachstehenden Abbildung eingezeichnete Winkel $\alpha$ ist für in dieser Art geschliffene Diamanten immer gleich.




**2)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$.

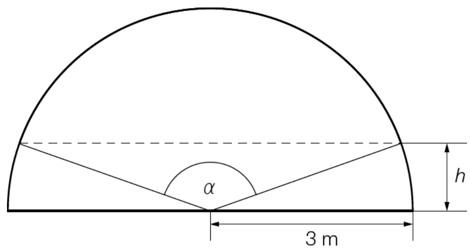
**1.24**



Der Querschnitt einer Unterführung hat die Form eines Halbkreises.
Die Unterführung soll bis zu einer Höhe $h$ neu ausgemalt werden.

**1)** Erstellen Sie mithilfe von $h$ eine Formel zur Berechnung des Winkels $\alpha$.

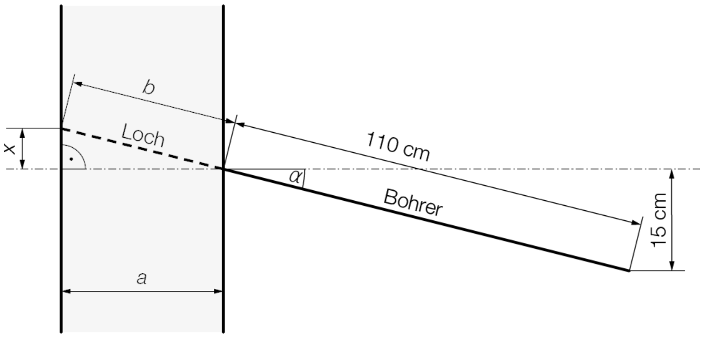
$\alpha =$ ______________________________



**1.25**



Mit einem 110 cm langen Bohrer soll, wie in der nachstehenden Abbildung dargestellt, ein Loch der Länge $b$ durch eine Wand mit der Wandstärke $a$ gebohrt werden.




**1)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$.

**2)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge $x$ mithilfe von $a$ und $b$.

$x =$ ______________________________

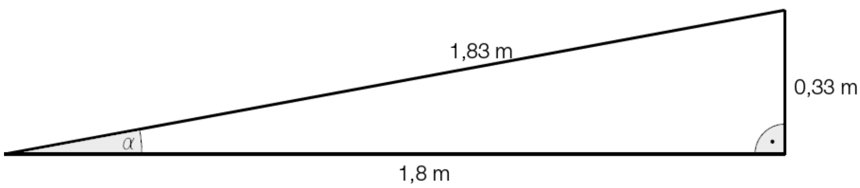
Die Wandstärke $a$ beträgt 65 cm.

**3)** Berechnen Sie, um wie viel Promille $b$ länger als $a$ ist.

**1.26**



Vor einem Eingang wird eine Rampe gebaut. Die Rampe hat in der Ansicht von der Seite die Form eines rechtwinkeligen Dreiecks (siehe nachstehende Abbildung).



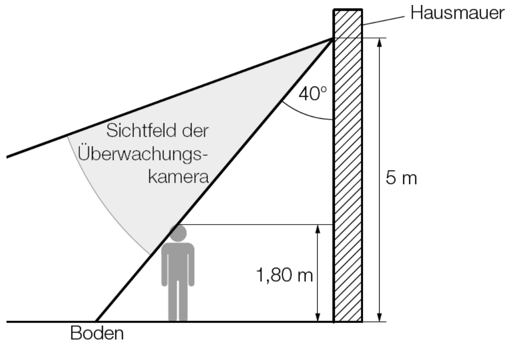

**1)** Zeigen Sie rechnerisch, dass das obige Dreieck tatsächlich rechtwinkelig ist.

**2)** Berechnen Sie den Steigungswinkel $\alpha$ dieser Rampe.

**1.27**



Der Eingangsbereich einer Bank wird überwacht.
Die nebenstehende Abbildung zeigt das Sichtfeld einer Überwachungskamera, die an einer Hausmauer in einer Höhe von 5 m montiert ist.
Eine 1,80 m große Person befindet sich genau am Rand des Sichtfelds der Überwachungskamera (siehe nebenstehende Abbildung).




**1)** Berechnen Sie, in welcher Entfernung von der Mauer sich diese Person befindet.

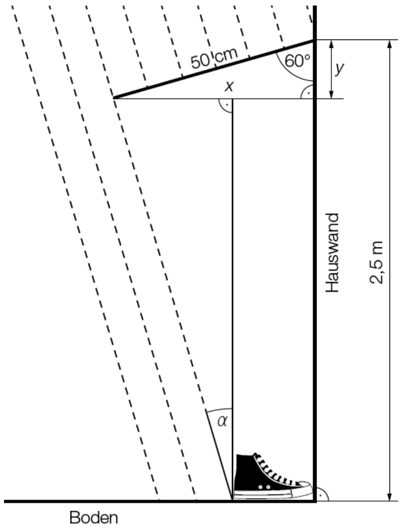
**1.28**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Konrad kommt von der Schule nach Hause und stellt seine Schuhe unter das 50 cm lange Vordach an der Hauswand.
Es beginnt zu regnen. Durch den Wind werden die Regentropfen seitlich abgelenkt (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung; die strichlierten Linien stellen die Regentropfen dar).

**1)** Berechnen Sie die Länge $x$.

**2)** Berechnen Sie, wie groß der Winkel $\alpha$ maximal sein darf, sodass Konrads 27 cm lange Schuhe trocken bleiben.

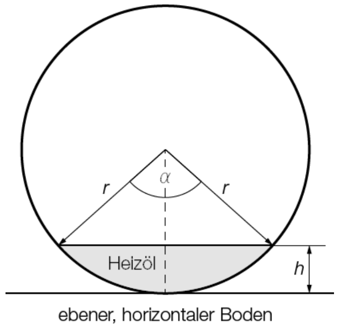



**1.29**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die nebenstehende Abbildung zeigt einen waagrecht gelagerten zylinderförmigen Öltank von vorne.
Stellen Sie aus $h$ und $r$ eine Formel zur Berechnung des Winkels $\alpha$ auf.

$\alpha =$ ______________________________




**1.30**

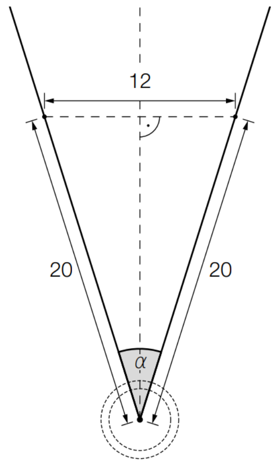
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.
Der Aufschlagbereich ist in der nebenstehenden Abbildung in der Ansicht von oben dargestellt (alle Angaben in Metern).

**1)** Berechnen Sie den in der nebenstehenden Abbildung markierten Winkel $\alpha$.

**2)** Markieren Sie in der nebenstehenden Abbildung diejenige Strecke, deren Länge durch den folgenden Ausdruck berechnet werden kann:

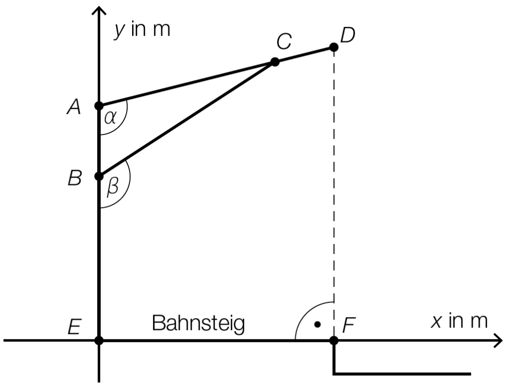
$$\frac{6}{\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$



**1.31**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Skizze ist eine Holzkonstruktion zur Überdachung eines Bahnsteigs dargestellt.




**1)** Erstellen Sie mithilfe von $\overline{AE}$, $\overline{AD}$ und $\alpha$ eine Formel zur Berechnung von $\overline{DF}$.

$\overline{DF} =$ ____________________________

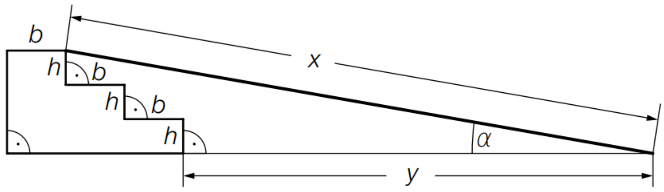
**1.32**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Rampe der Länge $x$ überwindet 3 Stufen. Jede Stufe hat die Höhe $h$ und die Breite $b$.

**1)** Kreuzen Sie die auf den dargestellten Sachverhalt zutreffende Formel an.

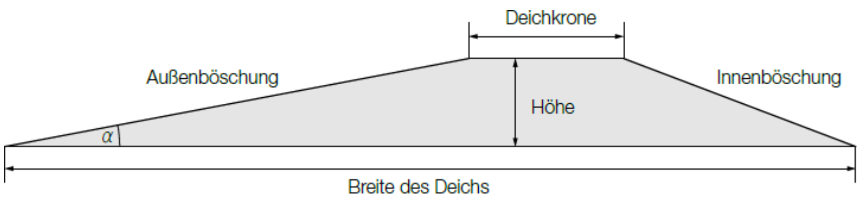
| | |
|---|---|
| $x = \frac{2 \cdot b}{\cos(\alpha)}$ | ☐ |
| $x = \frac{3 \cdot h \cdot \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$ | ☐ |
| $x = (2 \cdot b + y) \cdot \tan(\alpha)$ | ☐ |
| $x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$ | ☐ |
| $x = \frac{3 \cdot h + \sin(\alpha)}{2 \cdot b}$ | ☐ |




**1.33**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Um das Land vor Sturmfluten zu schützen, baut man Schutzwälle, sogenannte Deiche.
Auf einer Informationstafel ist ein Deichquerschnitt skizziert (nicht maßstabgetreu). Der Deich hat eine Höhe von 6 m, die Deichkrone ist 5 m breit. Der Inhalt seiner Querschnittsfläche beträgt 192 m$^2$.




**1)** Berechnen Sie die Breite dieses Deichs.

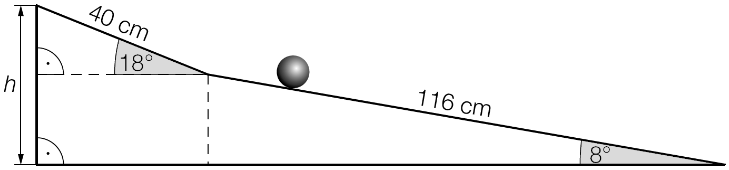
Die Außenböschung ist 36,5 m lang.

**2)** Bestimmen Sie den Neigungswinkel $\alpha$ der Außenböschung.

**1.34**



Eine Kugelbahn ist ein Spielzeug, auf dem man Kugeln nach unten rollen lassen kann. In der nachstehenden Abbildung ist eine bestimmte Kugelbahn dargestellt.




**1)** Berechnen Sie den Höhenunterschied $h$ zwischen Start und Ziel.

Eine Kugel hat einen Radius von 1 cm und rollt die gesamte Kugelbahn hinunter.

**2)** Berechnen Sie die Anzahl der Umdrehungen, die diese Kugel dafür benötigt.

**1.35**



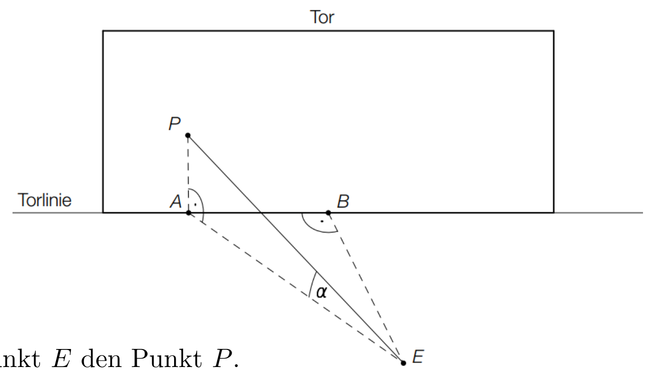
Ein Fußballer steht am Elfmeterpunkt $E$ und schießt den Ball unter einem Höhenwinkel von $\alpha = 5°$ ab.

Der Ball (vereinfacht als punktförmig angenommen) überfliegt die Torlinie im Punkt $P$.

Aufgrund der hohen Geschwindigkeit des Balls kann seine Flugbahn bis zum Punkt $P$ näherungsweise als geradlinig angenommen werden.

Folgende Entfernungen sind bekannt:

$\overline{AB} = 3\,\text{m}$ und $\overline{BE} = 11\,\text{m}$.




**1)** Berechnen Sie die Länge $\overline{EP}$.

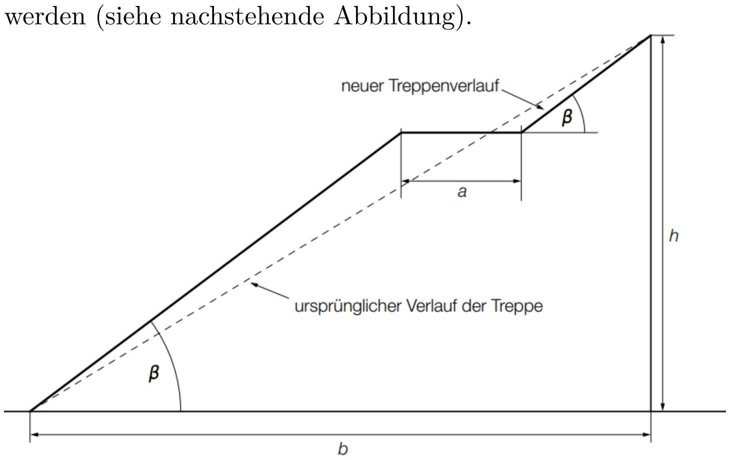
Der Ball erreicht 0,4 Sekunden nach dem Abschuss im Punkt $E$ den Punkt $P$.

**2)** Berechnen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Balls in km/h.

**1.36**



Parallel zu einer Rolltreppe verläuft eine Treppe. Bei der Erneuerung der Treppe soll ein Treppenabsatz eingebaut werden (siehe nachstehende Abbildung).




**1)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung des Steigungswinkels $\beta$ aus $b$, $h$ und $a$.

$\beta =$ ______________________

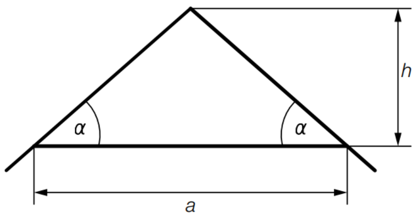
Der Steigungswinkel der ursprünglichen Treppe war kleiner als $45°$.

**2)** Erklären Sie, welche Bedingung für $a$ gelten muss, damit auch $\beta$ kleiner als $45°$ ist.

**1.37**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

**a)** Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt.

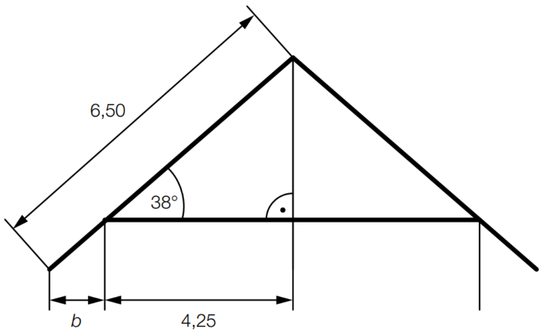



**1)** Erstellen Sie eine Formel, mit der man den Winkel $\alpha$ aus $a$ und $h$ berechnen kann.

$\alpha =$ ______________________

**2)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$ für $a = 7\,\text{m}$ und $h = 220\,\text{cm}$.

**b)** Der Querschnitt eines Dachstuhls ist in der nachstehenden Skizze vereinfacht dargestellt. Alle Längen sind in Metern angegeben.

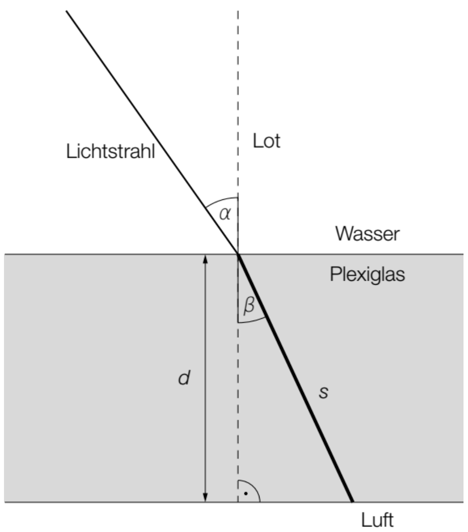



**1)** Berechnen Sie $b$.

**1.38**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die nachstehende Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.




$\alpha \dots$ Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Wasser
$\beta \dots$ Winkel zwischen Lichtstrahl und Lot im Plexiglas

Der Zusammenhang zwischen $\alpha$ und $\beta$ kann folgendermaßen ausgedrückt werden:
$\sin(\alpha)$ verhält sich zu $\sin(\beta)$ wie 1,49 zu 1,33.

**1)** Berechnen Sie den Winkel $\beta$, wenn gilt: $\alpha = 35\,°$.

**2)** Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung der Länge $s$, wenn die Dicke $d$ und der Winkel $\beta$ bekannt sind.

$s =$ ______________________

## 1.39

Ein Maibaum der Höhe $H$ steht senkrecht auf einem horizontalen Gelände.

**a)** Ein Maibaum der Höhe $H$ wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen 10,00 m langen Schatten. Die Sonne erscheint dabei unter dem Höhenwinkel $\alpha$.
Hans stellt sich so hin, dass sein Schatten an derselben Stelle endet wie jener des Maibaums. Hans ist 1,76 m groß und ist 8,50 m vom Maibaum entfernt.

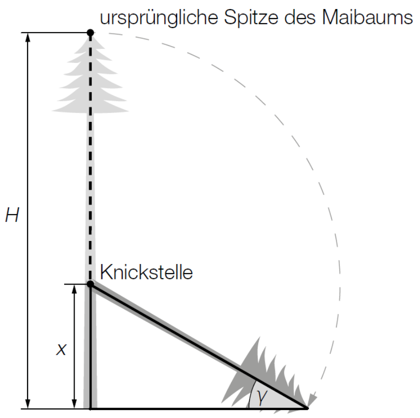
**1)** Veranschaulichen Sie den Sachverhalt in einer Skizze, in der die gegebenen Größen sowie der Höhenwinkel $\alpha$ und die Höhe $H$ beschriftet sind.

**2)** Berechnen Sie den Höhenwinkel $\alpha$.

**b)** Martin misst in einer horizontalen Entfernung von 50 m vom Maibaum den Höhenwinkel $\beta = 26{,}6°$ zur Spitze des Maibaums. Anschließend verkürzt er seine horizontale Entfernung auf die Hälfte. Er behauptet, dass sich dadurch der Höhenwinkel zur Spitze verdoppelt hat.

**1)** Überprüfen Sie nachweislich, ob Martins Behauptung richtig ist.

**c)** Bei einem starken Unwetter knickt ein Maibaum der Höhe $H$ um.



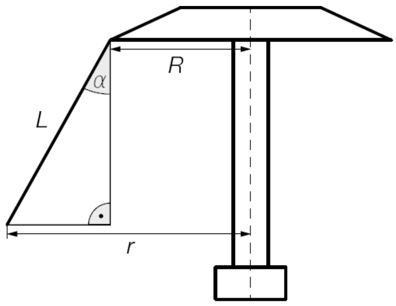

Der geknickte Teil schließt mit dem horizontalen Boden einen Winkel $\gamma$ ein (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

**1)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $x$ aus $H$ und $\gamma$ auf.

$x =$ ____________________

## 1.40

Auf einem Jahrmarkt steht ein Ringelspiel (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).



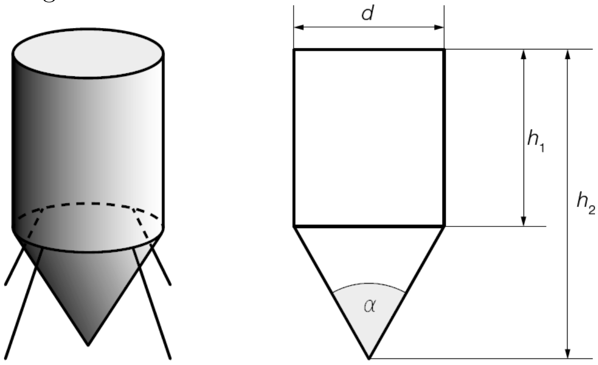

Bildquelle: Andreas Praefcke – own work, CC BY 3.0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kettenkarussell_Wuppertal_2005.jpg [20.02.2019].

Stellen Sie aus $L$, $R$ und $\alpha$ eine Formel zur Berechnung von $r$ auf.

$r =$ ____________________

## 1.41

In der nachstehenden Abbildung ist ein Wassertank, bestehend aus einem Drehzylinder und einem Drehkegel, dargestellt:




**1)** Stellen Sie aus $h_1$, $h_2$ und $d$ eine Formel zur Berechnung des Volumens $V$ des Wassertanks auf.

$V =$ ____________________

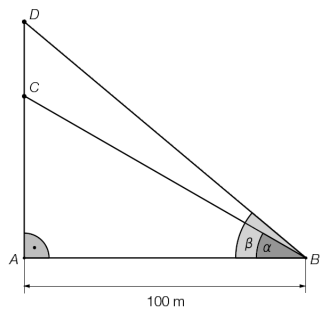
Es gilt: $d = 2{,}0\,\text{m}$, $h_1 = 4{,}5\,\text{m}$, $h_2 = 6{,}0\,\text{m}$.

**2)** Berechnen Sie den in der obigen Abbildung eingezeichneten Winkel $\alpha$.

## 1.42

Ein von einem Punkt $A$ senkrecht aufsteigender Ballon wird von einem Punkt $B$ am Flussufer unter dem Höhenwinkel $\alpha = 30°$ gesehen.
Etwas später erscheint der Ballon unter dem Höhenwinkel $\beta = 40°$ (siehe Skizze).

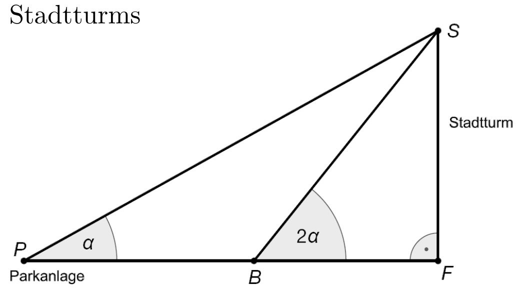
**1)** Berechnen Sie die Streckenlänge $\overline{CD}$.




## 1.43

**a)** Von einer neuen Parkanlage sieht man die Spitze des 51 m hohen Stadtturms unter dem Höhenwinkel $\alpha = 38{,}2°$.

**1)** Berechnen Sie, um wie viel Meter man sich dem Stadtturm entlang der Strecke $\overline{PF}$ nähern muss, damit dieser unter dem doppelten Höhenwinkel zu sehen ist.




**b)** Der Stadtturm mit einer Höhe $h$ wirft zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Schatten der Länge $b$.

**1)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Höhenwinkels, unter dem die Sonne zu diesem Zeitpunkt in dieser Stadt erscheint, auf.

## 1.44



Das Maria-Theresien-Denkmal in Wien wird vermessen.
Es werden die Höhenwinkel $\alpha = 45{,}38°$ und $\beta = 38{,}19°$ gemessen. Weiters ist die in der nebenstehenden Abbildung eingetragene Länge bekannt.

**1)** Berechnen Sie die in der nebenstehenden Abbildung mit $x$ bezeichnete Länge.

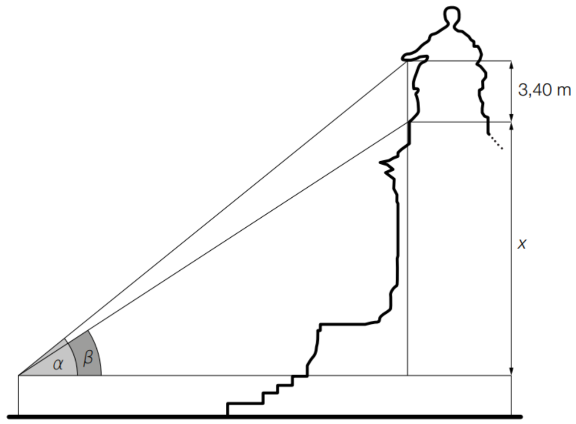



*Abbildung nicht maßstabgetreu!*

## 1.45



Die Schlossalmbahn in Bad Hofgastein ist eine Standseilbahn. Die Höhe der Talstation beträgt 843 Meter (m) über dem Meeresspiegel (ü. d. M.), die Höhe der Bergstation beträgt 1302 m ü. d. M., die direkte Verbindungsstrecke zwischen Talstation und Bergstation hat eine Länge von 1251 m.

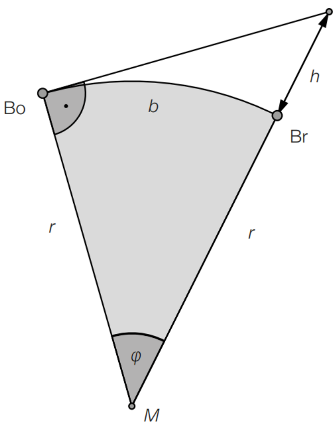
**1)** Übertragen Sie den Text in eine passende Skizze, die mit den gegebenen Größen vollständig zu beschriften ist.

**2)** Berechnen Sie den Steigungswinkel der direkten Verbindungsstrecke zwischen Talstation und Bergstation.

## 1.46



Der Bodensee misst in seiner längsten Ausdehnung von Bregenz (Br) bis Bodman (Bo) 66 Kilometer (km). Aufgrund der Erdkrümmung ist von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman nicht zu sehen (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).




$r$ ... Erdradius (6371 km)
$b$ ... Bogenlänge, entspricht der Entfernung zwischen Bregenz und Bodman
$M$ ... Erdmittelpunkt

**1)** Berechnen Sie den Winkel $\varphi$.

Um bei sehr guten Sichtverhältnissen von Bregenz aus das Seeufer bei Bodman sehen zu können, muss sich ein Beobachter in Bregenz mindestens auf einer Höhe $h$ über dem Seeniveau befinden (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

**2)** Berechnen Sie die Höhe $h$.

## 1.47



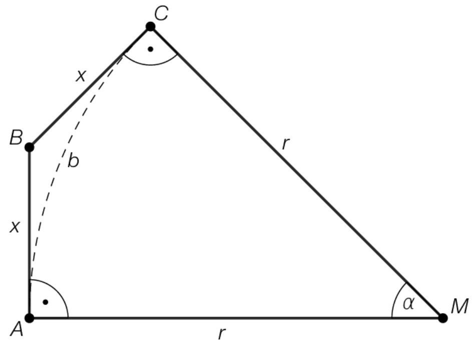
Ein 35 m hoher Aussichtsturm steht auf einer horizontalen Ebene.
Als *Sonnenhöhe* bezeichnet man den Winkel, den die einfallenden Sonnenstrahlen mit einer horizontalen Ebene bilden.

**1)** Berechnen Sie, um wie viele Meter der Schatten des Aussichtsturms länger wird, wenn die Sonnenhöhe von 45° auf 37° abnimmt.

**1.48**



Ein Gepard im Punkt $A$ hat den Abstand $x$ zu einer Gazelle im Punkt $B$. Die Gazelle läuft dann von $B$ nach $C$, während der Gepard entlang des Kreisbogens mit Mittelpunkt $M$ von $A$ nach $C$ läuft (siehe nebenstehende modellhafte Abbildung).




**1)** Berechnen Sie die Länge des Kreisbogens $b$ für $x = 40\,\text{m}$ und $\alpha = 45°$.

**1.49**



Um zur Dachstein-Rieseneishöhle zu gelangen, kann man die erste Teilstrecke der Dachsteinseilbahn benutzen. Diese führt von der Talstation auf 608 m über dem Meeresspiegel (ü. d. M.) zur Mittelstation auf der Schönbergalm auf 1350 m ü. d. M. Auf einer Landkarte mit Maßstab 1 : 50 000 misst man für die horizontale Entfernung zwischen Talstation und Mittelstation eine Strecke von 3,2 cm.
Ein Tourist steht bei der Talstation und blickt unter einem Höhenwinkel $\alpha$ zur Mittelstation.

**1)** Erstellen Sie eine Skizze, die den Winkel $\alpha$ und alle gegebenen Maße in Metern enthält.

**2)** Berechnen Sie den Höhenwinkel $\alpha$.

Auf einer anderen Landkarte ist die horizontale Entfernung zwischen Talstation und Mittelstation im Maßstab 1 : 100 000 dargestellt.

**3)** Beschreiben Sie, wie sich die Abbildungsgröße dieser Entfernung auf dieser Landkarte von jener auf der Landkarte im Maßstab 1 : 50 000 unterscheidet.

**1.1** $\sin(\alpha) = \frac{h}{z}$ $\sin(\beta) = \frac{h}{y}$ $\sin(\gamma) = \frac{x}{y}$ $\sin(\delta) = \frac{w}{z}$
$\cos(\alpha) = \frac{w}{z}$ $\cos(\beta) = \frac{x}{y}$ $\cos(\gamma) = \frac{h}{y}$ $\cos(\delta) = \frac{h}{z}$
$\tan(\alpha) = \frac{h}{w}$ $\tan(\beta) = \frac{h}{x}$ $\tan(\gamma) = \frac{x}{h}$ $\tan(\delta) = \frac{w}{h}$

**1.2** **a)** $\beta = 42°$, $y = 67{,}28\ldots$ cm, $z = 45{,}02\ldots$ cm **b)** $\alpha = 24{,}27\ldots°$, $\beta = 65{,}72\ldots°$, $z = 164{,}0\ldots$ cm

**1.3** $c = 8{,}062\ldots$ cm, $h_c = 3{,}472\ldots$ cm, $\alpha = 60{,}25\ldots°$, $\beta = 29{,}74\ldots°$, $A = 14\,\text{cm}^2$

**1.4** $a = 52{,}05\ldots$ m, $b = 24{,}27\ldots$ m, $c = 57{,}43\ldots$ m, $\beta = 25°$, $A = 631{,}8\ldots\,\text{m}^2$

**1.5** **a)** $a = 14{,}62$ cm, $b = 40{,}84$ cm, $c = 43{,}39$ cm, $\alpha = 19{,}7°$
**b)** $h = 42$ cm, $a = 50{,}48$ cm, $b = 75{,}72$ cm, $c = 91$ cm, $\alpha = 33{,}69°$, $\beta = 56{,}30°$
**c)** $b = 33{,}24$ cm, $c = 35{,}51$ cm, $\alpha = 20{,}61°$, $\beta = 69{,}39°$
**d)** $a = 16{,}53$ cm, $b = 10{,}9$ cm, $c = 19{,}8$ cm, $\alpha = 56{,}60°$, $\beta = 33{,}40°$
**e)** $b = 26{,}83$ cm, $c = 38{,}64$ cm, $\alpha = 46{,}01°$, $\beta = 43{,}99°$
**f)** $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 25$ cm, $\alpha = 36{,}87°$, $\beta = 53{,}13°$

**1.6**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☐ $\sin(\varphi) = \frac{x}{y}$ | ☐ $\cos(\varphi) = \frac{x}{y}$ | ☐ $a^2 + b^2 = c^2$ | ☒ $a^2 = b^2 + c^2$ |
| ☒ $\sin(\varphi) = \frac{x}{z}$ | ☒ $\sin(\delta) = \frac{y}{z}$ | ☒ $\sin(\beta) = \cos(\gamma)$ | ☒ $\sin(\gamma) = \cos(\beta)$ |
| ☐ $\sin(\varphi) = \frac{y}{z}$ | ☒ $\tan(\varphi) = \frac{x}{y}$ | ☒ $\beta = 90° - \gamma$ | ☐ $(\sin(\beta))^2 + (\cos(\gamma))^2 = 1$ |
| ☒ $\cos(\delta) = \frac{x}{z}$ | ☐ $\tan(\varphi) = \frac{y}{x}$ | ☐ $A = \frac{a \cdot b}{2}$ | ☒ $A = \frac{b \cdot c}{2}$ |

**1.7** Eingeschriebenes 6-Eck: 17,3… % Umschriebenes 6-Eck: 10,2… %
Eingeschriebenes 8-Eck: 9,96… % Umschriebenes 8-Eck: 5,47… %

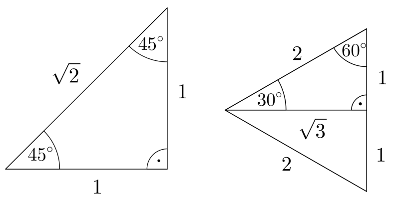
**1.8** **a)** $482{,}8\ldots\,\text{cm}^2$ **b)** 6,75… L **c)** $\beta = 72{,}71\ldots°$

**1.9** $2 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 4{,}51\ldots$

**1.10** $71{,}26\ldots°$

**1.11** **a)** Beide Parallelogramme haben die gleiche Seitenlänge $a$ und zugehörige Höhe $h_a$.
Also haben sie auch beide den gleichen Flächeninhalt $A = a \cdot h_a$.
**b)** $h_b = 1{,}81\ldots$ cm

**1.12** **a)**




**b)**

| | $\alpha = 30°$ | $\alpha = 45°$ | $\alpha = 60°$ |
|---|---|---|---|
| $\sin(\alpha)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos(\alpha)$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan(\alpha)$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |

**1.13** $\sin(\alpha) = \frac{5}{13}$ und $\cos(\alpha) = \frac{12}{13}$

**1.14** Schnittwinkel zweier Seitendiagonalen: 60° Schnittwinkel zwischen Seiten- und Raumdiagonale: 35,26…°

**1.15** **a)** $3528\,\text{cm}^2$ **b)** $35{,}26\ldots°$

**1.16** **a)** $\alpha = 53{,}13\ldots°$ $\beta = 67{,}38\ldots°$ $\gamma = 59{,}48\ldots°$ **b)** $A = 84$

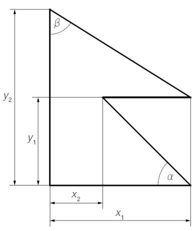
**1.17** **a)** $AB = x \implies AC' = x \implies CC' = x \implies BC' = 1 - x$
**b)** Beide haben die Innenwinkel 72°, 72° und 36°.
**c)** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{1-x}{x} \implies \cdots \implies x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$
**d)** $\cos(72°) = \dfrac{\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$
**e)** $\sin(72°) = \sqrt{1 - \cos^2(72°)} = \cdots = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+5}{8}}$

**1.18** **a)** $O = \sqrt{3} \cdot a^2$ **b)** $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot a^3$ **c)** $70{,}52\ldots°$

**1.19** **a)** $O = (1 + \sqrt{3}) \cdot a^2$ **b)** $V = \frac{1}{3 \cdot \sqrt{2}} \cdot a^3$ **c)** $54{,}73\ldots°$ **d)** $109{,}4\ldots°$

**1.20** $A = \frac{(b-a)^2}{2 \cdot \tan(\alpha)}$

**1.21** **1)** $\alpha = \arctan\left(\dfrac{y_1}{x_1 - x_2}\right)$ **2)**



**1.22** **1)** $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ **2)** $\alpha = 75{,}88...^\circ$

**1.23** **1)** $H = 1{,}071... \cdot T$ **2)** $\alpha = 40{,}82...^\circ$

**1.24** $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{h}{3}\right)$ oder $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot \arcsin\left(\frac{h}{3}\right)$

**1.25** **1)** $\alpha = 7{,}83...^\circ$ **2)** $x = \sqrt{b^2 - a^2}$ **3)** um 9,42 ‰

**1.26** **a)** $1{,}8^2 + 0{,}33^2 = 3{,}3489 = 1{,}83^2$ ✓(Umkehrung von Satz von Pythagoras) **b)** $\alpha = 10{,}38...^\circ$

**1.27** 2,685... m

**1.28** **1)** $x = 43{,}3...$ cm **2)** $\alpha = 4{,}14...^\circ$

**1.29** $\alpha = 2 \cdot \arccos\left(\frac{h-r}{r}\right)$

**1.30** $\alpha = 34{,}91...^\circ$. Mit dem Ausdruck wird die Länge der eingezeichneten Höhe berechnet.

**1.31** $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \sin(\alpha - 90^\circ)$ oder $\overline{DF} = \overline{AE} + \overline{AD} \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$

**1.32** $x = \frac{2 \cdot b + y}{\cos(\alpha)}$

**1.33** **1)** Der Deich ist 59 m breit. **2)** $\alpha = 9{,}461...^\circ$

**1.34** **1)** 28,50... cm **2)** 24,82... Umdrehungen

**1.35** **1)** $\overline{EP} = 11{,}45...$ m **2)** 103,0... km/h

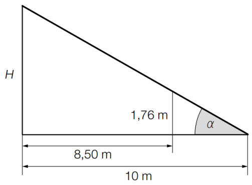
**1.36** **1)** $\beta = \arctan\left(\frac{h}{b-a}\right)$

**2)** Ein Steigungswinkel von genau 45° würde $h = b - a$ bedeuten.
Damit $\beta$ kleiner als 45° ist, muss $a < b - h$ gelten.

**1.37** **a)** $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{a/2}\right) = 32{,}15...^\circ$ **b)** $b = 0{,}872...$ m

**1.38** **1)** $\beta = 30{,}79...^\circ$ **2)** $s = \frac{d}{\cos(\beta)}$

**1.39** **a)**




$\alpha = 49{,}55...^\circ$

**b)** Der neue Höhenwinkel ist $45{,}04...^\circ \neq 2 \cdot 26{,}6^\circ$. Die Behauptung ist also nicht richtig.

**c)** $x = \frac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

**1.40** $r = R + L \cdot \sin(\alpha)$

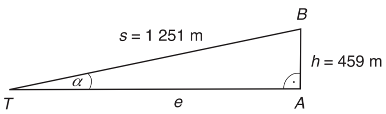
**1.41** **1)** $V = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot (h_2 - h_1) \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot h_1$ **2)** $\alpha = 67{,}38...^\circ$

**1.42** $\overline{CD} = 26{,}1...$ m

**1.43** **a)** $\overline{PB} = 52{,}47...$ m **b)** $\alpha = \arctan\left(\frac{h}{b}\right)$

**1.44** 11,79... m

**1.45** **1)**



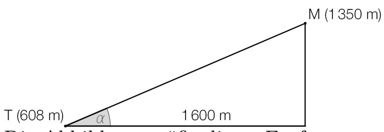

**2)** $21{,}52...^\circ$

**1.46** **1)** $\varphi = 0{,}593...^\circ$ **2)** $h = 341{,}8...$ m

**1.47** 11,44... m

**1.48** 75,84... m

**1.49** **1)**




**2)** $24{,}87...^\circ$

**3)** Die Abbildungsgröße dieser Entfernung auf der Landkarte im Maßstab 1 : 50 000 wird halbiert.

## 2. Winkelfunktionen am Einheitskreis

**MmF-Materialien**

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Winkelfunktionen am Einheitskreis

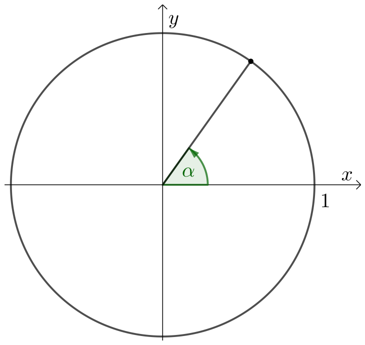
In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

### 2.1

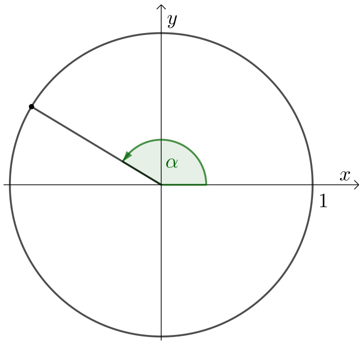
Ein Winkel $\alpha$ ist im Einheitskreis dargestellt.

**a)** Entscheide, ob $\sin(\alpha) > 0$ oder $\sin(\alpha) < 0$ gilt. Zeichne eine Strecke mit Länge $|\sin(\alpha)|$ ein.
Zeichne denjenigen Winkel $\beta \in [0°; 360°[$ ein, für den $\sin(\beta) = \sin(\alpha)$ und $\alpha \neq \beta$ gilt.

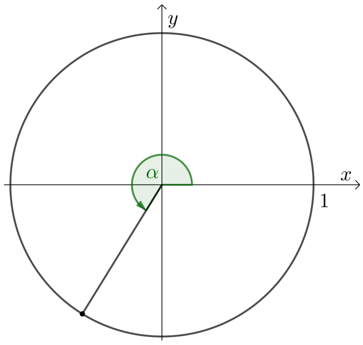
**1)**




**2)**

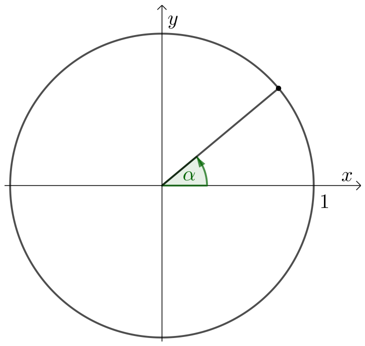



**3)**

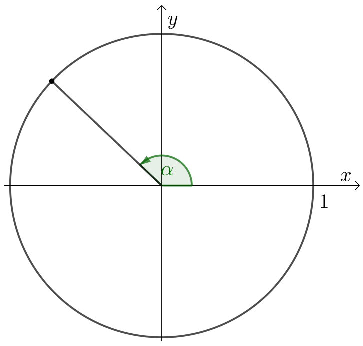



**b)** Entscheide, ob $\cos(\alpha) > 0$ oder $\cos(\alpha) < 0$ gilt. Zeichne eine Strecke mit Länge $|\cos(\alpha)|$ ein.
Zeichne denjenigen Winkel $\beta \in [0°; 360°[$ ein, für den $\cos(\beta) = \cos(\alpha)$ und $\alpha \neq \beta$ gilt.

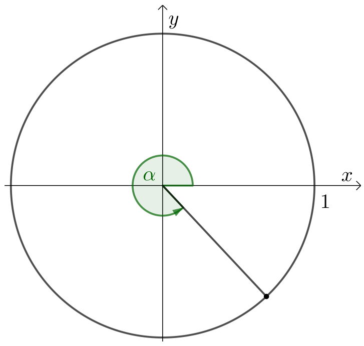
**1)**




**2)**

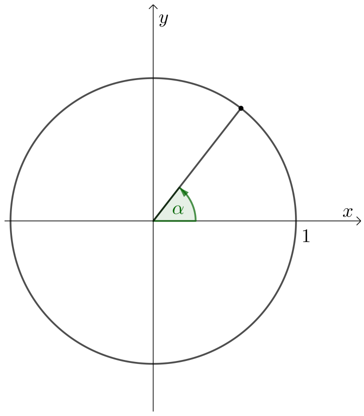



**3)**

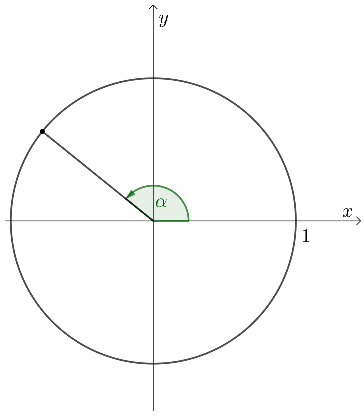


**c)** Entscheide, ob $\tan(\alpha) > 0$ oder $\tan(\alpha) < 0$ gilt. Zeichne eine Strecke mit Länge $|\tan(\alpha)|$ ein. Zeichne denjenigen Winkel $\beta \in [0°; 360°[$ ein, für den $\tan(\beta) = \tan(\alpha)$ und $\alpha \neq \beta$ gilt.

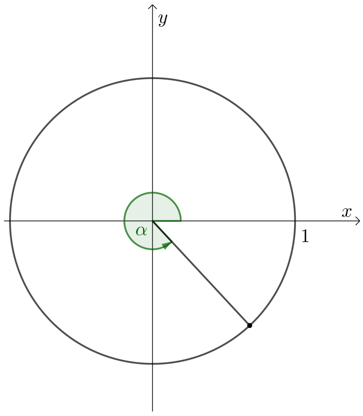
**1)**




**2)**



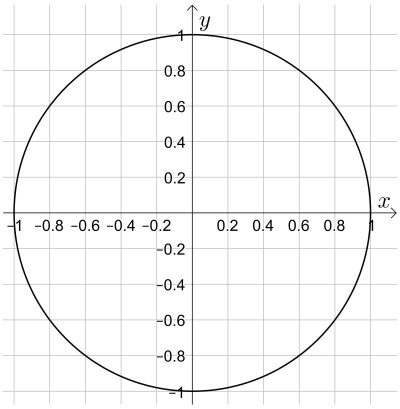

**3)**



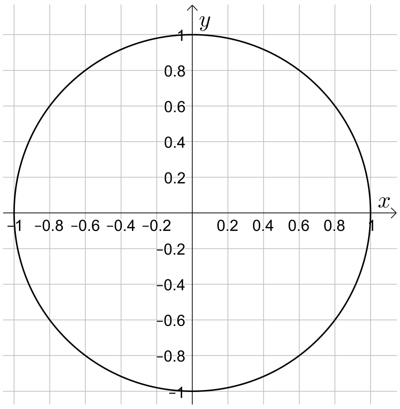

## 2.2

Berechne die Lösungen der gegebenen Gleichung über der Grundmenge $[0°; 360°[$.
Stelle die Lösungen am Einheitskreis darunter dar.

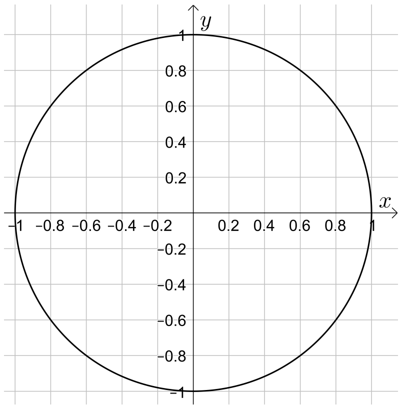
**1)** $\sin(\alpha) = -0{,}4$



**2)** $\cos(\beta) = 0{,}8$



**3)** $\tan(\gamma) = 0{,}8$



## 2.3

Löse die Gleichung über der Grundmenge $[0°; 360°[$.

**a)** $\sin(\alpha) = 0{,}7$

**b)** $\sin(\alpha) = -0{,}15$

**c)** $\cos(\alpha) = 0{,}4$

**d)** $\cos(\alpha) = -0{,}9$

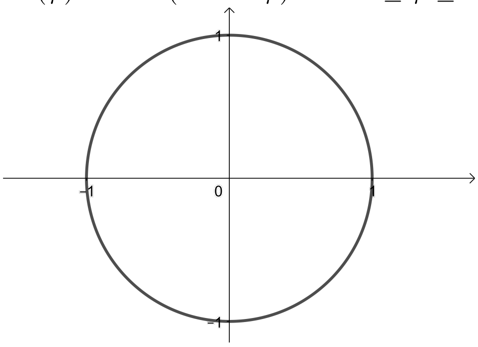
**e)** $\tan(\alpha) = 4{,}25$

**f)** $\tan(\alpha) = -20$

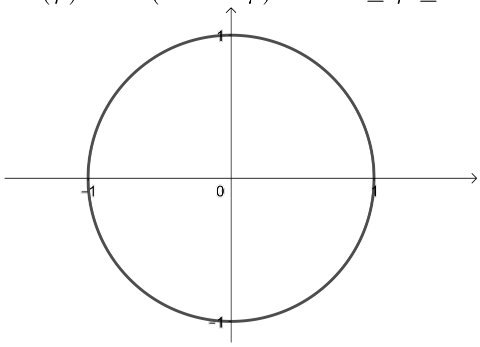
**2.4**

Überprüfe jeweils anhand des Einheitskreises, ob die angegebenen Gleichungen richtig sind.

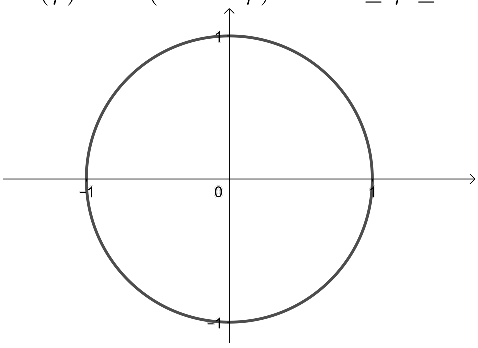
**a)** $\sin(\varphi) = -\sin(180° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$



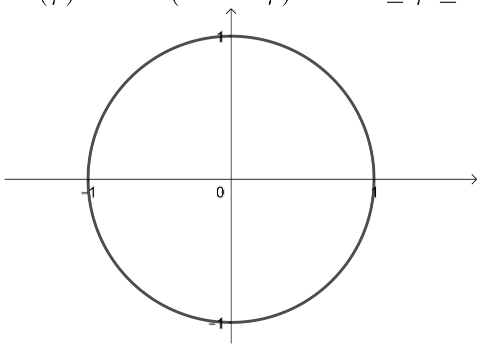

**c)** $\cos(\varphi) = \cos(180° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$




**b)** $\cos(\varphi) = \cos(360° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$




**d)** $\sin(\varphi) = -\sin(360° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$

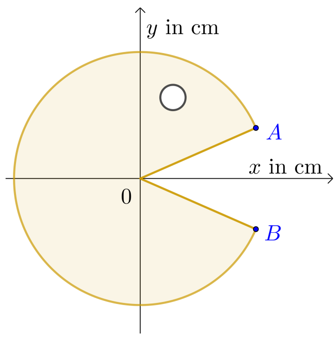



**2.5**

Der rechts dargestellte Pac-Man ist ein Kreissektor mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 5 cm.
Das Auge ist ein Kreis mit Durchmesser 1 cm.
Es gilt $A = (x_A \mid 2)$ und $B = (x_B \mid -2)$.

**a)** Berechne $x_A$ und $x_B$.

**b)** Berechne den Inhalt der gelb markierten Fläche.




**2.6**

**a)** Erkläre am Einheitskreis, weshalb $\sin(\alpha + 90°) = \cos(\alpha)$ und $\cos(\alpha + 90°) = -\sin(\alpha)$ gilt.

**b)** Erkläre am Einheitskreis, weshalb $\arcsin(-t) = -\arcsin(t)$ für alle $t \in [-1; 1]$ gilt.

**c)** Zeige, dass $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ für alle $t \in [-1; 1]$ gilt. Hinweis: Pythagoras.

**d)** Berechne mit dem Taschenrechner $\arcsin(t) + \arccos(t)$ für einige Werte $t \in [-1; 1]$.
Stelle eine Vermutung auf und erkläre sie am Einheitskreis.

**2.7**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Gegeben sind sechs verschiedene Intervalle.

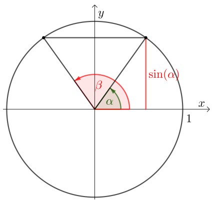
Für alle Winkel $\alpha$ aus einem dieser Intervalle gilt: $\sin(\alpha) \geq 0$ und $\sin(\alpha) \neq 1$.

**Aufgabenstellung:**

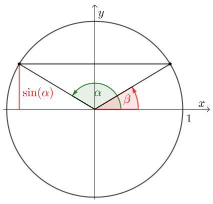
Kreuzen Sie das zutreffende Intervall an. [1 aus 6]

| | |
|---|---|
| [270°; 360°) | ☐ |
| [90°; 180°] | ☐ |
| (0°; 180°) | ☐ |
| [0°; 90°) | ☐ |
| (90°; 270°] | ☐ |
| [180°; 270°] | ☐ |

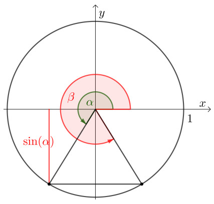
**2.1** **a)** **1)** $\sin(\alpha) > 0$



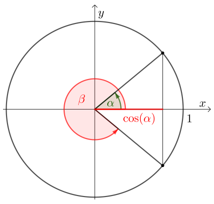

**2)** $\sin(\alpha) > 0$



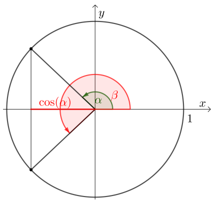

**3)** $\sin(\alpha) < 0$



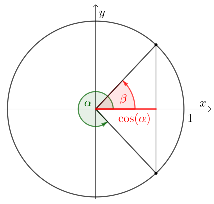

**b)** **1)** $\cos(\alpha) > 0$



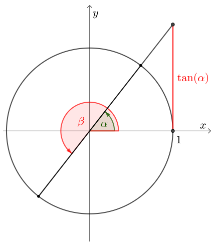

**2)** $\cos(\alpha) < 0$



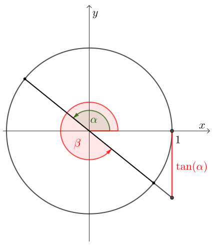

**3)** $\cos(\alpha) > 0$



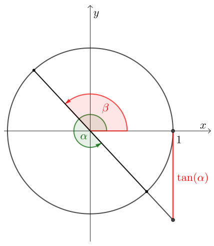

**c)** **1)** $\tan(\alpha) > 0$




**2)** $\tan(\alpha) < 0$



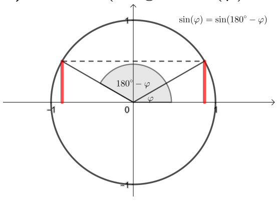

**3)** $\tan(\alpha) < 0$



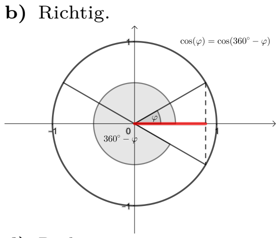

**2.2** **1)** $\alpha_1 = 336{,}4\ldots°$, $\alpha_2 = 203{,}5\ldots°$ **2)** $\beta_1 = 36{,}8\ldots°$, $\beta_2 = 323{,}1\ldots°$ **3)** $\gamma_1 = 38{,}6\ldots°$, $\gamma_2 = 218{,}6\ldots°$

**2.3** **a)** $\alpha_1 = 44{,}42\ldots°$ $\alpha_2 = 135{,}57\ldots°$ **b)** $\alpha_1 = 351{,}37\ldots°$ $\alpha_2 = 188{,}62\ldots°$ **c)** $\alpha_1 = 66{,}42\ldots°$ $\alpha_2 = 293{,}57\ldots°$
**d)** $\alpha_1 = 154{,}15\ldots°$ $\alpha_2 = 205{,}84\ldots°$ **e)** $\alpha_1 = 76{,}75\ldots°$ $\alpha_2 = 256{,}75\ldots°$ **f)** $\alpha_1 = 272{,}86\ldots°$ $\alpha_2 = 92{,}86\ldots°$

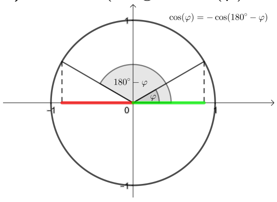
**2.4** **a)** Falsch. (Es gilt: $\sin(\varphi) = \sin(180° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$)



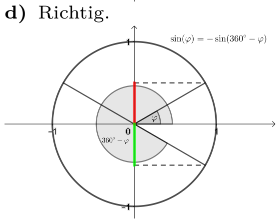

**b)** Richtig.




**c)** Falsch. (Es gilt: $\cos(\varphi) = -\cos(180° - \varphi)$ für $0° \leq \varphi \leq 180°$)




**d)** Richtig.




**2.5** **a)** $x_A = x_B = 4{,}58\ldots$ cm **b)** $67{,}46\ldots$ cm$^2$

**2.6** **a)** Rechtwinkeliges Dreieck im Einheitskreis um 90° drehen.
**b)** Punkt am Einheitskreis an der $x$-Achse spiegeln.
**c)** Rechtwinkeliges Dreieck im Einheitskreis mit Hypotenuse 1 und Katheten $t$ bzw. $\sqrt{1-t^2}$.
**d)** $\arcsin(t) + \arccos(t) = \frac{\pi}{2}$. Verwende zum Beispiel $\cos\left(\frac{\pi}{2} - ☺\right) = \sin(☺)$.

**2.7** Richtig ist die 4. Antwort von oben.

## 3. Graphen der Winkelfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Graphen der Winkelfunktionen

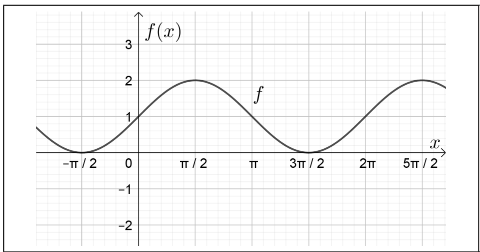
In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

### 3.1

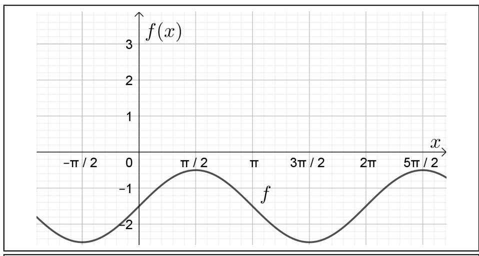
Für eine Funktion $f$ gilt: $f(x) = \sin(x) + d$

Ordne richtig zu:

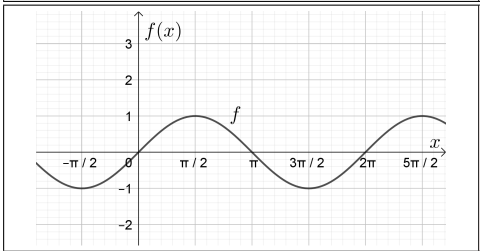
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $d = -1{,}5$ | B | $d = 1$ | C | $d = 2{,}5$ | D | $d = 0$ |



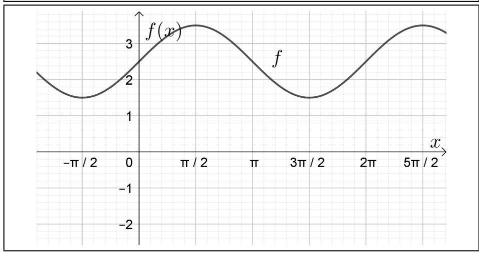

☐




☐




☐



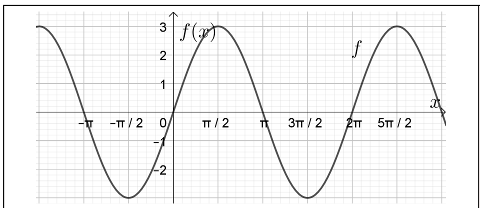

☐

### 3.2

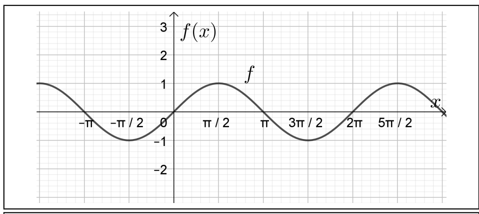
Für eine Funktion $f$ gilt: $f(x) = a \cdot \sin(x)$

Ordne richtig zu:

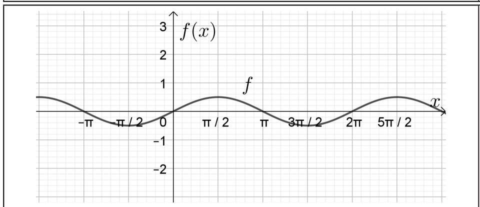
| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $a = -2$ | B | $a = 1$ | C | $a = 3$ | D | $a = 0{,}5$ |



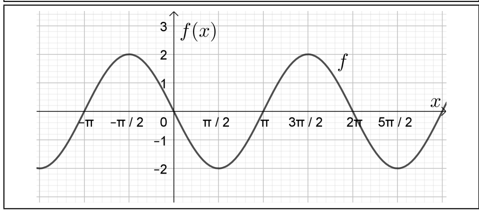

☐




☐




☐



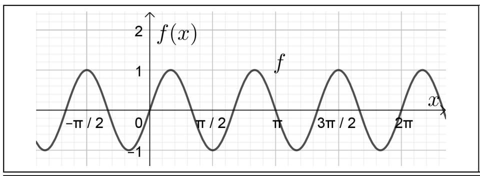

☐

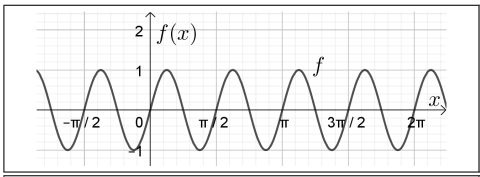
## 3.3

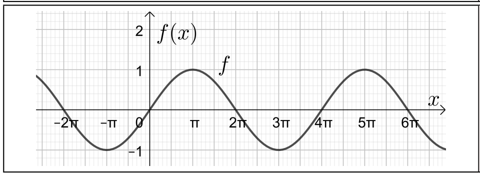
Für eine Funktion $f$ gilt: $f(x) = \sin(b \cdot x)$

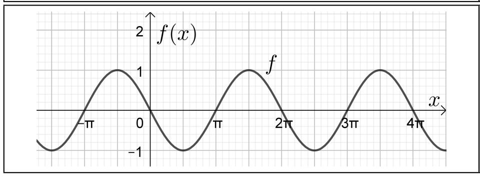
Ordne richtig zu:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $b = -1$ | B | $b = 0{,}5$ | C | $b = 4$ | D | $b = 3$ |



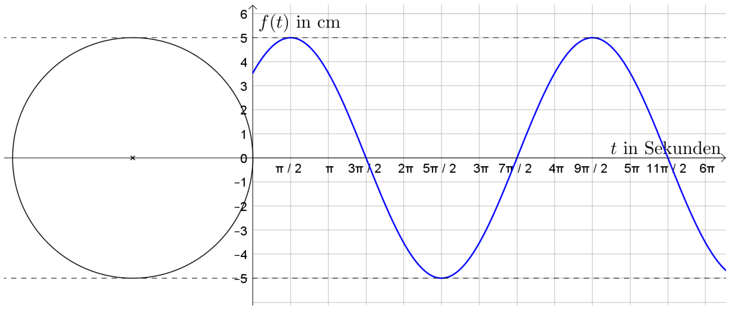




## 3.4

Der Graph einer allgemeinen Sinusfunktion $f(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ und ein Zeigerdiagramm sind dargestellt.




**a)** Zeichne die Startposition des Zeigers ein.
Ermittle jenen Zeitpunkt, an dem sich der Zeiger erstmals wieder an der Startposition befindet.
Berechne die Frequenz in Hertz. (1 Hertz bedeutet eine Schwingung pro Sekunde.)

**b)** Ermittle die Amplitude $A$, die Kreisfrequenz $\omega$ und den Nullphasenwinkel $\varphi$.

**c)** Ermittle die Funktionsgleichung von $f$.

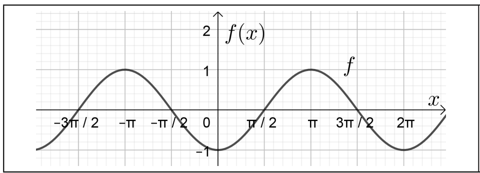
## 3.5

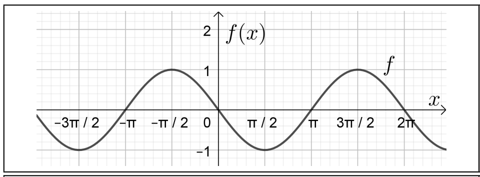
Für eine Funktion $f$ gilt: $f(x) = \sin(x + c)$

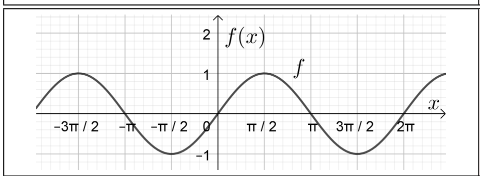
Hinweis: In welche Richtung zeigt der Zeiger an der Stelle $x = 0$?

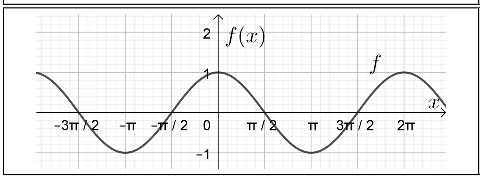
Ordne richtig zu:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $c = \frac{\pi}{2}$ | B | $c = -\pi$ | C | $c = \frac{3 \cdot \pi}{2}$ | D | $c = 0$ |



## 3.6

Erinnere dich, dass $\sin(-x) = -\sin(x)$, $\cos(-x) = \cos(x)$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Trage jeweils Zahlen in die großen Kästchen und + bzw. − in die kleinen Kästchen so ein, dass die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ stimmt.

**a)** $3 \cdot \sin(-4 \cdot x) + 2 = -3 \cdot \sin\left(\square \cdot x\right) + \square$

**b)** $4 \cdot \sin(-2 \cdot x + 1) = -4 \cdot \sin\left(\square \cdot x \,\square\, \square\right)$

**c)** $3 \cdot \cos(-4 \cdot x) + 2 = \square \cdot \cos(4 \cdot x) + \square$

**d)** $4 \cdot \cos(-2 \cdot x + 1) = \square \cdot \cos\left(2 \cdot x \,\square\, \square\right)$

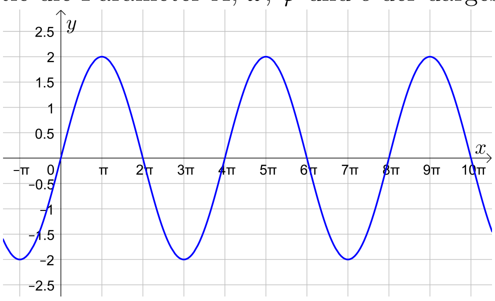
**e)** $\cos\left(5 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5 \cdot x \,\square\, \square\right)$

**f)** $\sin\left(5 \cdot x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(5 \cdot x \,\square\, \square\right)$

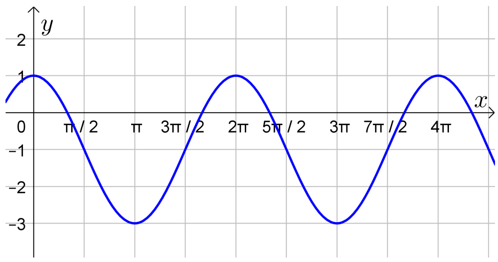
## 3.7

Ermittle die Parameter $A$, $\omega$, $\varphi$ und $c$ der dargestellten Sinusschwingungen $y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$.

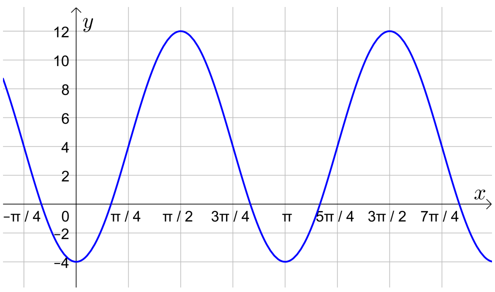
**a)**



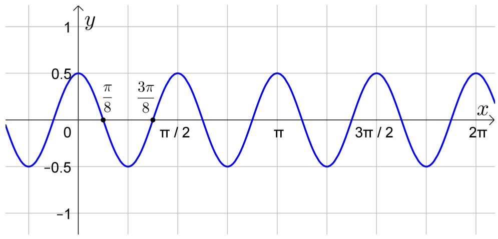

**c)**




**b)**

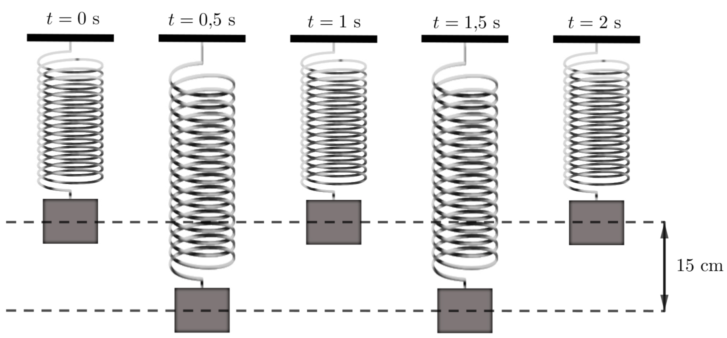



**d)**



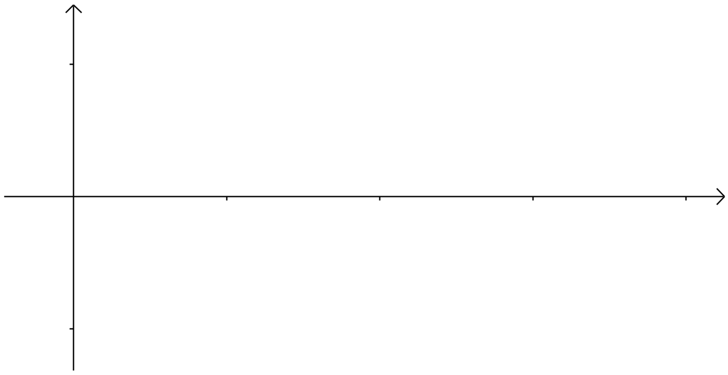

## 3.8

Die nachfolgende Abbildung zeigt die ersten beiden Sekunden der Schwingung eines Federpendels:



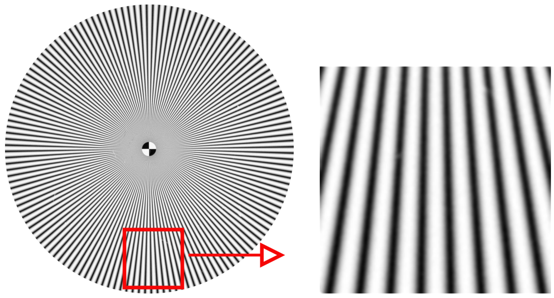

**a)** Stelle die Gleichung einer passenden allgemeinen Sinusfunktion auf, die diese Schwingung beschreibt.

**b)** Zeichne den Graphen der Funktion in das nachstehende Koordinatensystem.
Vergiss nicht auf die Beschriftung und Skalierung der Achsen.

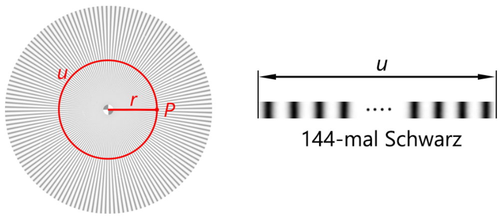


**3.9**

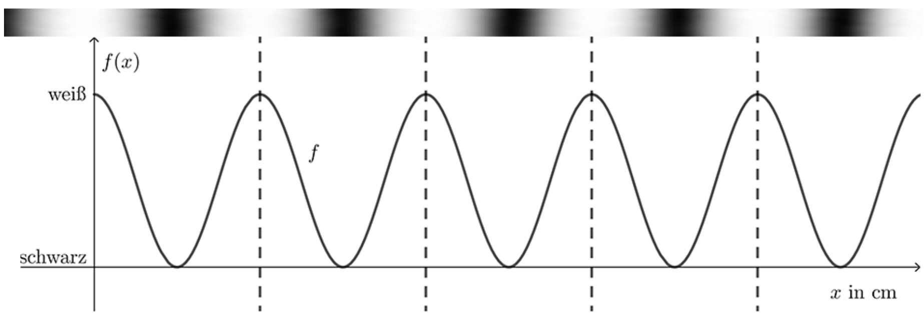
Um das Auflösungsvermögen eines Kamera-Objektiv-Systems zu untersuchen, kann man spezielle Test-Charts fotografieren und dann von einer Software auswerten lassen.
Ein gängiges Motiv solcher Test-Charts ist der sogenannte *modulierte Siemensstern*. Dieser besteht aus einem Streifenmuster mit sinusförmigem Helligkeitsverlauf (siehe nebenstehende Abbildungen).



Der Übergang zwischen den hellen und dunklen Streifen erfolgt bei einem sinusförmigen Helligkeitsverlauf nicht sprunghaft, sondern allmählich und stetig über die dazwischenliegenden Grautöne.
Ein Siemensstern besteht aus insgesamt 144 dunklen Streifen.




Für einen bestimmten Radius $r$ und den zugehörigen Kreisumfang $u$ kann der Helligkeitsverlauf mithilfe der allgemeinen Sinusfunktion $f$ modelliert werden:




$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

$x$ ... Entfernung vom Startpunkt $P$ in cm, gemessen entlang der Kreislinie mit Radius $r$
$f(x)$ ... Intensität von schwarz bis weiß bei einer Entfernung $x$
Die Intensität kann Werte von 0 (schwarz) bis 100 (weiß) annehmen.

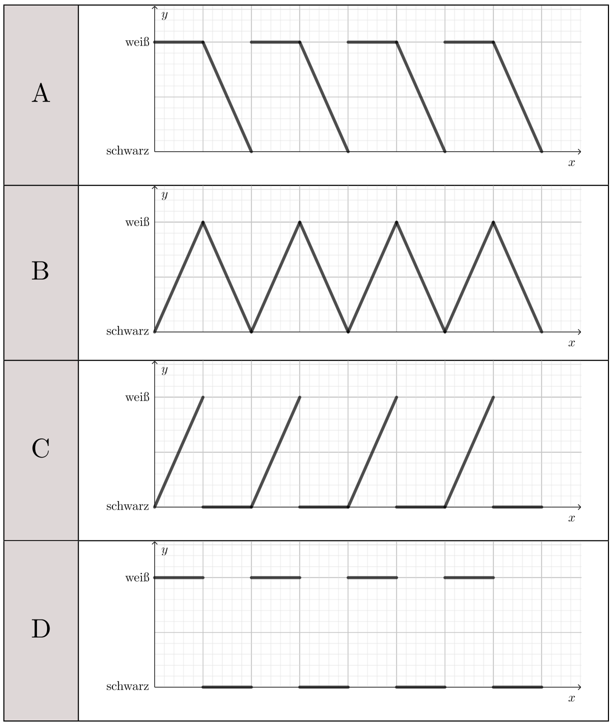
**a)** Gib die Parameter $a$ und $d$ an.

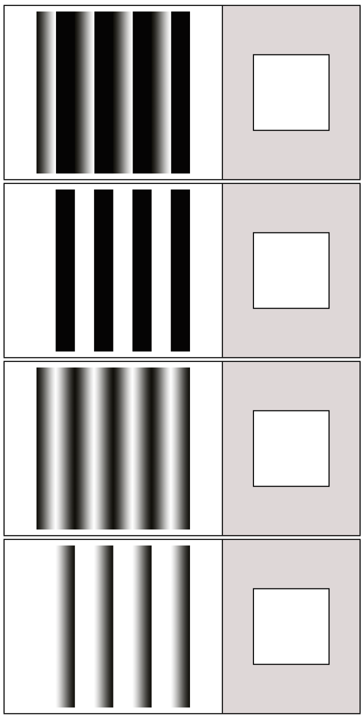
**b)** Bestimme für $r = 10\,\text{cm}$ den Parameter $b$.

**c)** Gib den Parameter $c$ an.

**d)** Erkläre im gegebenen Sachzusammenhang, warum der Parameter $b$ vom Radius $r$ abhängig ist.

**e)** Auch die nachfolgenden Helligkeitsverläufe können mithilfe periodischer Funktionen modelliert werden. Ordne den Helligkeitsverläufen die zugehörigen Modellierungen A-D zu.



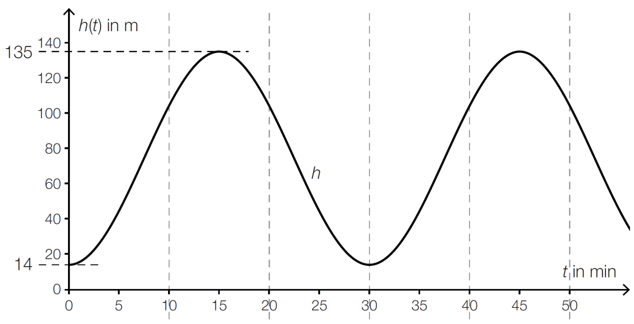



## 3.10

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Dreht sich ein Riesenrad mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt $t$ über dem Boden befindet:

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$




Das *London Eye*, eines der größten Riesenräder, dreht sich so langsam, dass es für das Ein- und Aussteigen der Fahrgäste nicht anhalten muss. Der Graph der Funktion $h$ ist in nebenstehender Abbildung dargestellt.

**1)** Lesen Sie den Durchmesser des Riesenrades ab.

**2)** Ermitteln Sie den Parameter $\omega$.

**3)** Ermitteln Sie den Parameter $c$.

### 3.11



Während eines Ausdauertrainings fährt ein Radfahrer für eine gewisse Zeit mit konstanter Trittfrequenz. Die Höhe des Pedals über dem Boden kann dabei näherungsweise durch die Gleichung der Funktion $h$ beschrieben werden:

$$h(t) = 17 \cdot \sin(\omega \cdot t) + 25$$

$t$ ... Zeit in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe des Pedals über dem Boden zur Zeit $t$ in Zentimetern (cm)

Die Trittfrequenz dieses Radfahrers beträgt 76 Umdrehungen pro Minute.

**1)** Berechnen Sie die Kreisfrequenz $\omega$ in der Einheit $\mathrm{s}^{-1}$.

**2)** Ermitteln Sie die minimale Höhe und die maximale Höhe des Pedals über dem Boden.

### 3.12



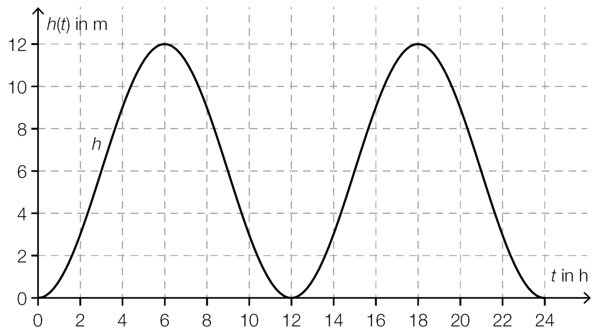
Ebbe und Flut beeinflussen die Höhe des Meeresspiegels.
Der tiefste Wasserstand wird als Niedrigwasser bezeichnet.
Die zeitliche Abhängigkeit der Höhe des Wasserstands über diesem Wert kann näherungsweise durch eine Funktion $h$ mit $h(t) = A + B \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ beschrieben werden.

Dabei ist $t$ die Zeit in Stunden und $B > 0$.

**1)** Lesen Sie aus dem Diagramm die Parameter $A$ und $B$ ab.

**2)** Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms den Parameter $\omega$.

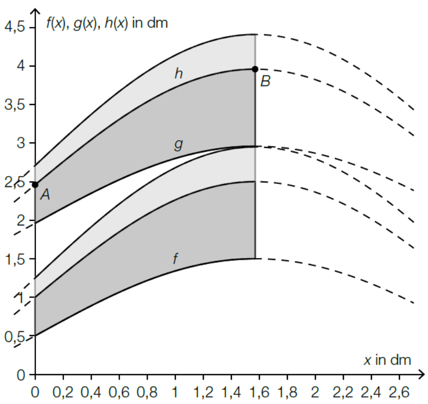
**3)** Bestimmen Sie mithilfe des Diagramms den Parameter $\varphi$.

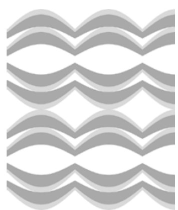



### 3.13



Ein Stoffmuster im Retro-Stil entsteht, indem ein Ausschnitt immer wieder kopiert und gespiegelt wird. Dabei werden die Begrenzungslinien als Graphen von Funktionen modelliert (siehe nachstehende Abbildungen).



Für die Funktion $f$ gilt: $f(x) = \sin(x) + 0{,}5$
$x$, $f(x)$ ... Koordinaten in dm

Der Graph der Funktion $g$ entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion $f$ entlang der vertikalen Achse um 1,46 dm nach oben.

**1)** Stellen Sie eine Gleichung der Funktion $g$ auf.

Der Graph der Funktion $h$ mit $h(x) = a \cdot \sin(x) + b$ verläuft durch den Punkt $A = (0 \mid 2{,}46)$ und den Hochpunkt $B = \left(\frac{\pi}{2} \mid 3{,}96\right)$.

**2)** Bestimmen Sie die Koeffizienten $a$ und $b$.

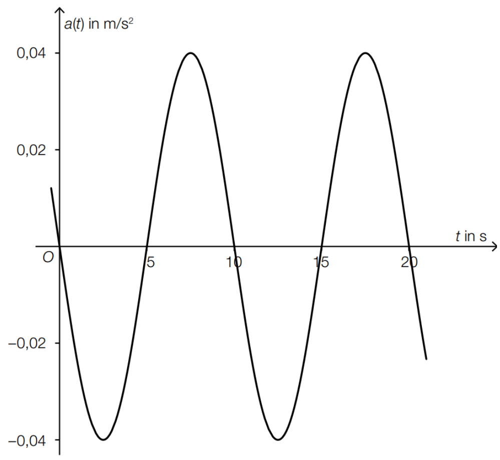
## 3.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein an einer Feder befestigter Körper bewegt sich unter dem Einfluss der Federkraft.
Das nebenstehende Beschleunigung-Zeit-Diagramm zeigt den sinusförmigen Verlauf der Beschleunigung eines Körpers durch die Federkraft. Es gilt:

$$a(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \quad \text{mit } A > 0.$$

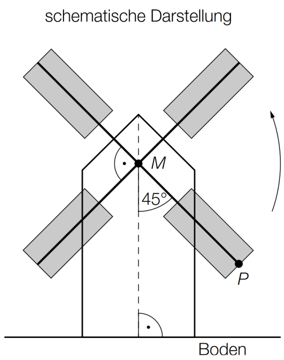
**1)** Bestimmen Sie $A$, $\omega$ und $\varphi$ mithilfe des Diagramms.




## 3.15

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die nachstehenden Abbildungen zeigen die Windmühle Oppelhain in Deutschland.




Bildquelle: Edweisch – own work, public domain, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0f/BockwindmühleOppelhain.jpg [21.11.2018].

Der Drehpunkt $M$ der Flügel befindet sich 13 m über dem Boden.
Die Länge eines Flügels (Strecke $MP$) beträgt 10,62 m.

**1)** Berechnen Sie die Höhe des Punktes $P$ über dem Boden.

Die Flügel drehen sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn und benötigen für eine volle Umdrehung 10 s. Die obige schematische Darstellung zeigt die Flügelstellung zum Zeitpunkt $t = 0$. Die Höhe des Punktes $P$ über dem Boden kann durch eine Funktion $h$ in Abhängigkeit von der Zeit $t$ beschrieben werden.

$$h(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$$

$t \ldots$ Zeit in s
$h(t) \ldots$ Höhe des Punktes $P$ über dem Boden zur Zeit $t$ in m

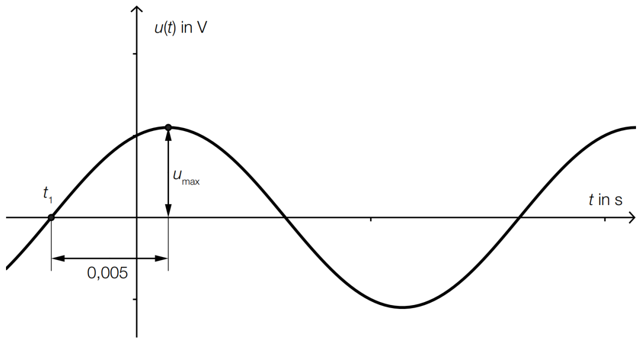
**2)** Ermitteln Sie die Parameter $a$, $c$, $\omega$ und $\varphi$ der Funktion $h$.

**3.16**



In der nebenstehenden Grafik ist eine elektrische Wechselspannung dargestellt.
Dabei gilt: $u_{\text{max}} = 110\,\text{V}$, $t_1 = -0{,}003\,65\,\text{s}$

**1)** Geben Sie diese Wechselspannung in der Form $u(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ an.

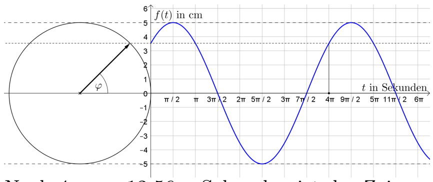



**3.1** Obere Reihe: B, A  Untere Reihe: D, C

**3.2** Obere Reihe: C, B  Untere Reihe: D, A

**3.3** Obere Reihe: D, C  Untere Reihe: B, A

**3.4** **a)**




Nach $4 \cdot \pi = 12{,}56\ldots$ Sekunden ist der Zeiger wieder an der Startposition.  $f = 0{,}0795\ldots\,\text{Hz}$

**b)** $A = 5\,\text{cm}$  $\omega = 0{,}5\,\text{rad/s}$  $\varphi = \frac{\pi}{4}\,\text{rad}$  $\varphi$ kann auch um ein Vielfaches von $2 \cdot \pi$ verändert sein, z.B.: $\varphi = -\frac{7\pi}{4}\,\text{rad}$

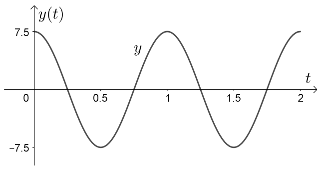
**c)** $f(t) = 5 \cdot \sin(0{,}5 \cdot t + \frac{\pi}{4})$

**3.5** Obere Reihe: C, B  Untere Reihe: D, A

**3.6** **a)** $-3 \cdot \sin(4 \cdot x) + 2$  **b)** $-4 \cdot \sin(2 \cdot x - 1)$  **c)** $3 \cdot \cos(4 \cdot x) + 2$  **d)** $4 \cdot \cos(2 \cdot x - 1)$  **e)** $\sin\left(5 \cdot x + \frac{5 \cdot \pi}{6}\right)$  **f)** $\cos\left(5 \cdot x - \frac{\pi}{6}\right)$

**3.7** **a)** $y = 2 \cdot \sin(0{,}5 \cdot x)$  **b)** $y = 8 \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) + 4$  **c)** $y = 2 \cdot \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - 1$  **d)** $y = 0{,}5 \cdot \sin\left(4x - \frac{3\pi}{2}\right)$

**3.8** Zum Beispiel: $y(t) = 7{,}5 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t + \frac{\pi}{2})$




**3.9** **a)** $a = 50$, $d = 50$

**b)** $b = 14{,}4$

**c)** $c = \frac{\pi}{2}$

**d)** $b$ ist abhängig davon, wie oft pro Längeneinheit (in cm) eine ganze Periode durchlaufen wird: Wird $r$ beispielsweise kleiner, so wird auch der Umfang $u$ kleiner, während die Anzahl der schwarzen Felder gleich bleibt.
Dadurch werden pro Längeneinheit mehr ganze Perioden durchlaufen und $b$ entsprechend größer.

**e)** von oben nach unten: C, D, B, A

**3.10** **1)** $d = 121\,\text{m}$  **2)** $\omega = 0{,}209\ldots\,\text{rad/min}$  **3)** $c = 74{,}5\,\text{m}$

**3.11** $\omega = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}2\dot{6} \approx 8$
Die Kreisfrequenz beträgt rund $8\,\text{s}^{-1}$.
Die Zahl 17 ist die Amplitude der Sinusfunktion, die Zahl 25 bewirkt eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion in vertikaler Richtung.
minimale Höhe über dem Boden: 8 cm  maximale Höhe über dem Boden: 42 cm

**3.12** $A = 6$  $B = 6$  $\omega = \frac{\pi}{6}$  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

**3.13** $g(x) = \sin(x) + 1{,}96$ oder $g(x) = f(x) + 1{,}46$  $a = 1{,}5$  $b = 2{,}46$

**3.14** $A = 0{,}04$  $\omega = \frac{\pi}{5}$  $\varphi = -\pi$

**3.15** **1)** $5{,}49\ldots\,\text{m}$  **2)** $a = 10{,}62\,\text{m}$, $c = 13\,\text{m}$, $\omega = 0{,}628\,\text{rad/s}$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}\ (+k \cdot 2 \cdot \pi)\,\text{rad}$  mit $k \in \mathbb{Z}$

**3.16** $u(t) = 110 \cdot \sin(314{,}16 \cdot t + 1{,}147)$

## 4. Goniometrische Gleichungen

MmF-Materialien

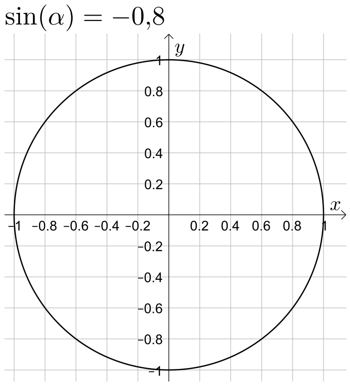
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Goniometrische Gleichungen

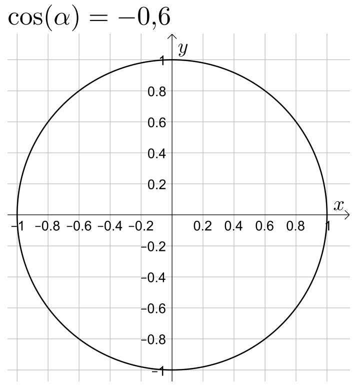
### 4.1

Berechne alle Lösungen der gegebenen Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
Stelle die beiden Lösungen in $[0\,\text{rad}; 2\cdot\pi\,\text{rad}[$ grafisch dar.

**a)** $\sin(\alpha) = -0{,}8$




**b)** $\cos(\alpha) = -0{,}6$




### 4.2

Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$. Alle Winkel sind im Bogenmaß. Hinweis: $\tan(\smiley) = \frac{\sin(\smiley)}{\cos(\smiley)}$

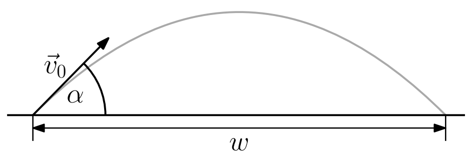
**a)** $\sin(2\cdot x) = 0{,}3$ **b)** $\cos(3\cdot x + 2) = -0{,}7$ **c)** $\tan(3\cdot x - 1) = 42$ **d)** $5\cdot\sin(x) = \cos(x)$

### 4.3

Der *schiefe Wurf* modelliert das Flugverhalten eines Wurfballs.
Befinden sich Abwurf- und Aufprallpunkt auf der gleichen Höhe, dann gilt (unter Vernachlässigung der Reibung):

$$w = \frac{v_0^2\cdot\sin(2\cdot\alpha)}{g}$$

| | | |
|---|---|---|
| $w$ | Wurfweite | m |
| $v_0$ | Abwurfgeschwindigkeit | m/s |
| $\alpha$ | Abwurfwinkel | ° oder rad |
| $g \approx 9{,}81$ | Erdbeschleunigung | m/s$^2$ |



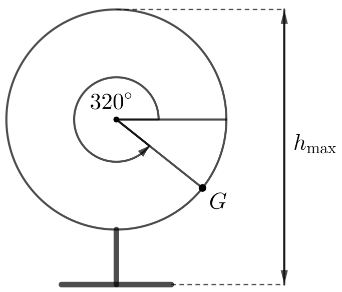

**a)** Berechne die Wurfweite bei der Abwurfgeschwindigkeit 80 km/h und dem Abwurfwinkel 30°.

**b)** Die Abwurfgeschwindigkeit beträgt diesmal 24,3 m/s.
Berechne die beiden Abwurfwinkel in °, mit denen man die Wurfweite 60 m erreicht.

**c)** Je größer $\sin(2\cdot\alpha)$ bei konstanter Abwurfgeschwindigkeit $v_0$ ist, desto größer ist auch die Wurfweite $w$.
Für welchen spitzen Winkel $\alpha$ ist die Wurfweite also maximal?

**4.4**

Stefan fährt in einem Riesenrad, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn dreht.




- Das Riesenrad hat den Durchmesser $d = 54$ m.
- Die Höhe des Riesenrads beträgt $h_{max} = 60$ m.
- Eine vollständige Umdrehung des Riesenrads dauert 5 Minuten.
- Zum Zeitpunkt $t = 0$ min befindet sich Stefan in der Gondel $G$.

Dabei gilt: $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + c$
$t \ldots$ Zeit in min
$h(t) \ldots$ Gondelhöhe über dem Boden in m

**a)** Ermittle die Parameter $A$, $\omega$, $\varphi$ und $c$. Gib ihre Einheiten an. (Winkel im Bogenmaß)

**b)** Wie viele Sekunden befindet sich Stefan während einer Umdrehung höchstens 42 m über dem Boden?

**4.5**

Für die Funktion $f$ gilt:

$$f(x) = -2{,}3 + 5{,}8 \cdot \sin(5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 8) \qquad \text{(Winkel im Bogenmaß)}$$

**a)** Ermittle den kleinsten und den größten Funktionswert von $f$.

**b)** Berechne einen Hochpunkt der Funktion $f$.

**4.6**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Wassertiefe in einem Hafenbecken kann näherungsweise durch die folgende Funktion $H$ beschrieben werden:

$$H(t) = 6 + 1{,}8 \cdot \cos(0{,}507 \cdot t)$$

$t$ ... Zeit nach Mitternacht in h
$H(t)$ ... Wassertiefe zur Zeit $t$ in m

**1)** Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahl 6 im gegebenen Sachzusammenhang.

**2)** Berechnen Sie die Wassertiefe um 8:20 Uhr morgens.

**4.7**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Dreht sich das *Wiener Riesenrad* ohne Zwischenstopps, so gilt für die Höhe $h(t)$, in der sich eine Gondel zum Zeitpunkt $t$ über dem Boden befindet:

$$h(t) = 30{,}48 \cdot \sin(0{,}024\,64 \cdot t) + 34{,}27$$

$t$ ... Zeit seit Beginn der Beobachtung in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe, in der sich diese Gondel zum Zeitpunkt $t$ befindet, in Metern (m)

**1)** Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem diese Gondel erstmals eine Höhe von 60 m erreicht.

**2)** Bestimmen Sie die Zeitdauer, während derer sich die Gondel im Laufe einer Umdrehung in einer Höhe von mindestens 60 m befindet.

**4.8**

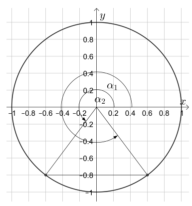
Der Verlauf einer Wechselspannung wird von einem Schüler mithilfe der Funktion $u$ beschrieben:

$$u(t) = -20 \cdot \sin(50 \cdot t)$$

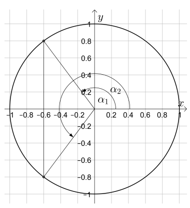
$t$ ... Zeit in Sekunden
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit $t$ in Volt (V)

**1)** Ermitteln Sie aus der gegebenen Funktionsgleichung die Periodendauer der Schwingung.

**2)** Ermitteln Sie für das Zeitintervall $[0; 0{,}15]$, zu welchen Zeitpunkten die Spannung $10\,\text{V}$ beträgt.



**4.1** **a)** $\alpha_1 = -0{,}927...\,\text{rad} + k \cdot 2 \cdot \pi (= 5{,}355...\,\text{rad} + k \cdot 2 \cdot \pi),\ \alpha_2 = 4{,}068...\,\text{rad} + k \cdot 2 \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$



**b)** $\alpha_1 = 2{,}214...\,\text{rad} + k \cdot 2 \cdot \pi,\ \ \alpha_2 = 4{,}068...\,\text{rad} + k \cdot 2 \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$

**4.2** **a)** $x_{1,k} = 0{,}152... + k \cdot \pi$ rad, $x_{2,k} = 1{,}418... + k \cdot \pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$ **b)** $x_{1,k} = 0{,}115... + k \cdot \frac{2\cdot\pi}{3}$ rad, $x_{2,k} = 0{,}646... + k \cdot \frac{2\cdot\pi}{3}$ rad, $k \in \mathbb{Z}$
**c)** $x_k = 0{,}848... + k \cdot \frac{\pi}{3}$ rad, $k \in \mathbb{Z}$ **d)** $x_k = 0{,}197... + k \cdot \pi$ rad, $k \in \mathbb{Z}$

**4.3** **a)** 43,59... m **b)** 42,70... ° und 47,29... ° **c)** $\alpha = 45^\circ \implies \sin(90^\circ) = 1$

**4.4** **a)** $c = 33\,\text{m},\ A = 27\,\text{m},\ \varphi = 5{,}585...\,\text{rad},\ \omega = 1{,}256...\,\text{rad/min}$
**b)** Die beiden kleinsten positiven Lösungen von $h(t) = 42$ sind $t_1 = 0{,}825...\,\text{min}$ und $t_2 = 2{,}785...\,\text{min}$.
Stefan ist während einer Umdrehung 182,4... s in höchstens 42 m Höhe.

**4.5** **a)** Kleinster Funktionswert: $-8{,}1$ Größter Funktionswert: 3,5
**b)** Zum Beispiel: $H = (1{,}597... \mid 3{,}5)$ (1,597... ist eine Lösung von $5 \cdot x^2 - 2 \cdot x - 8 = \frac{\pi}{2}$.)

**4.6** Im Durchschnitt beträgt die Wassertiefe im Hafenbecken 6 m.
Die Wassertiefe um 8:20 Uhr beträgt rund 5,2 m.

**4.7** **1)** $\approx 41\,\text{s}$ **2)** $\approx 46\,\text{s}$

**4.8** $T = 0{,}1256... \approx 0{,}126\,\text{s}$
Zu den Zeitpunkten $t_1 = \frac{7\cdot\pi}{300} \approx 0{,}073\,\text{s}$ und $t_2 = \frac{11\cdot\pi}{300} \approx 0{,}115\,\text{s}$ beträgt die Spannung im gegebenen Zeitintervall 10 V.

## 5. Allgemeines Dreieck

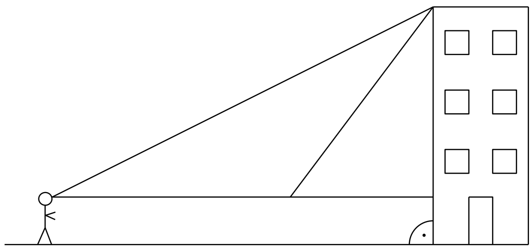
MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck

### 5.1

Um die Höhe eines Gebäudes zu bestimmen, misst du von deinem Standort den Höhenwinkel $\alpha = 28°$ zum Gebäudedach. Anschließend gehst du um 8 Meter in Richtung des Gebäudes und misst diesmal den Höhenwinkel $\beta = 42°$.
Deine Aughöhe beträgt 1,8 m.
Beschrifte die Skizze rechts.
Berechne die Höhe $h$ des Gebäudes.

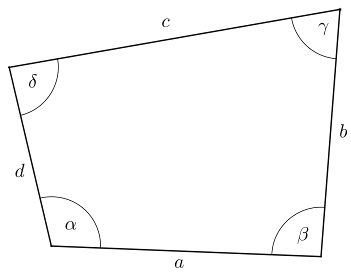


### 5.2

Im rechts dargestellten Viereck gilt:

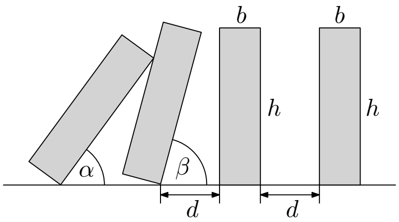
$$b = 7{,}7\,\text{cm},\ c = 10{,}5\,\text{cm},\ d = 5{,}7\,\text{cm},\ \beta = 92°,\ \delta = 86°$$

bekannt. Berechne den Umfang des Vierecks.




### 5.3

Dominosteine mit der Breite $b = 13$ mm und der Höhe $h = 56$ mm sind in einer Reihe aufgestellt.




Der Abstand zwischen benachbarten Dominosteinen beträgt $d = 2{,}7$ cm.
Der linke Stein fällt um und löst damit einen Dominoeffekt aus.
Wie groß ist der Winkel $\beta$, wenn $\alpha = 50°$ ist?

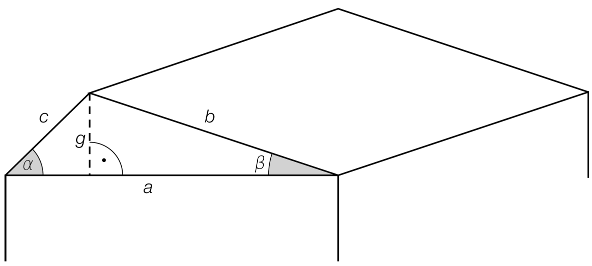
### 5.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Zur Schneelastberechnung wird der Neigungswinkel $\alpha$ des in der nachstehenden Abbildung dargestellten Daches benötigt. Dabei gilt:
$a = 20$ m, $b = 16$ m und $c = 7$ m

**1)** Ermitteln Sie den Neigungswinkel $\alpha$.

**2)** Berechnen Sie den Abstand $g$.

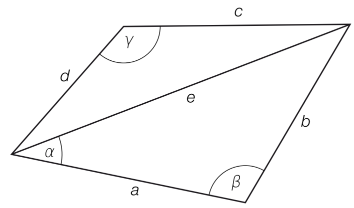


## 5.5



In einen Zaun soll eine Ausnehmung in Form eines Vierecks mit den gegebenen Größen $b = 0{,}75\,\text{m}$, $d = 0{,}5\,\text{m}$, $\alpha = 35°$, $\beta = 95°$ und $\gamma = 135°$ geschnitten werden.

**1)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Vierecks.

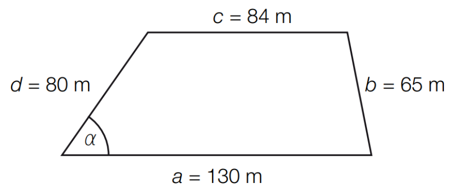



## 5.6



Herr Konrad hat ein Grundstück gekauft.
Der Grundriss des Grundstücks hat die Form eines Trapezes. In der nebenstehenden (nicht maßstabgetreuen) Skizze sind die Seitenlängen des Grundstücks eingetragen.

**1)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$.



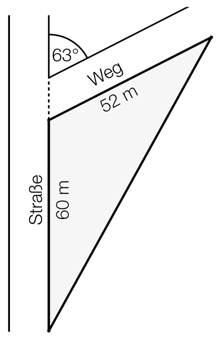

## 5.7



Ein dreieckiges Grundstück wird an einer Seite von einem Nachbargrundstück begrenzt.
An einer Seite grenzt es an eine Straße und an der dritten Seite an einen Weg.
Das Grundstück soll vollständig umzäunt werden.

**1)** Berechnen Sie die Länge des benötigten Zauns.

**2)** Zeigen Sie mithilfe der trigonometrischen Flächenformel, dass sich der Flächeninhalt $A$ des Grundstücks vervierfacht, wenn alle Seitenlängen verdoppelt werden.




## 5.8

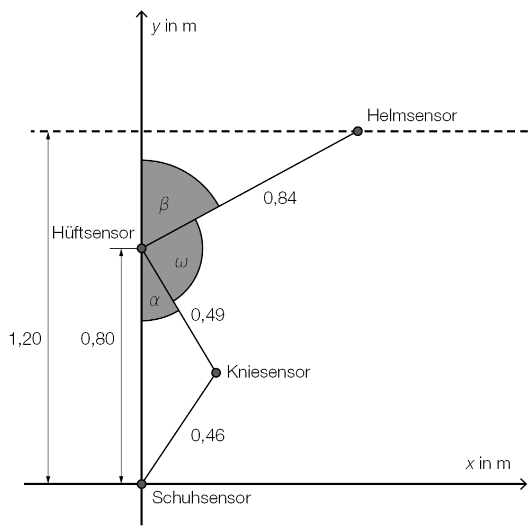


Für die Analyse eines Bewegungsablaufs beim Skispringen wurden 4 Sensoren an der Ausrüstung eines Skispringers befestigt.

1. Sensor: Schuh
2. Sensor: Knie
3. Sensor: Hüfte
4. Sensor: Helm

In der nebenstehenden Abbildung sind die Positionen der Sensoren für eine Position im Bewegungsablauf des Skispringers in einem Koordinatensystem dargestellt (Angaben in Metern).

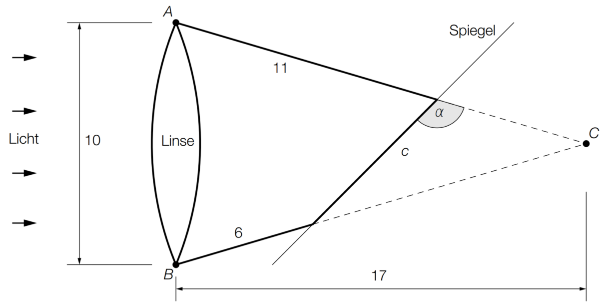
**1)** Berechnen Sie den Winkel $\omega$.



**5.9**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bei einem Experiment wird das von einer Sammellinse gebündelte Licht auf einen schräg gestellten Spiegel gerichtet (siehe nicht maßstabgetreue Skizze, alle Abmessungen in cm). Es gilt: $\overline{AC} = \overline{BC}$



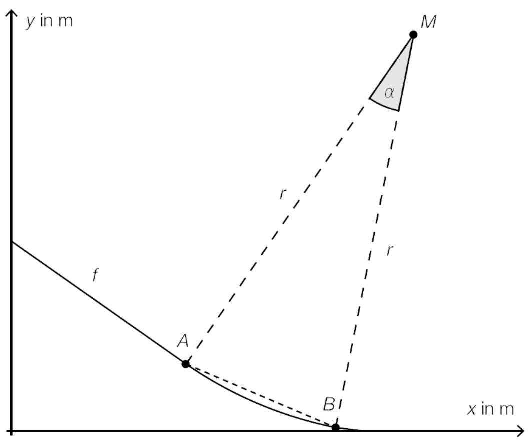

**1)** Berechnen Sie die Länge $c$.

**2)** Berechnen Sie den stumpfen Winkel $\alpha$.

**5.10**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Anlauf der Mühlenkopfschanze in Willingen (Deutschland) ist in der nebenstehenden Abbildung vereinfacht als Graph einer Funktion $f$ dargestellt.
$A$ und $B$ sind Punkte eines Kreises mit Mittelpunkt $M$ und Radius $r = 105{,}6\,\text{m}$.
Die geradlinige Strecke $AB$ hat eine Länge von $43{,}4\,\text{m}$.




**1)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$.

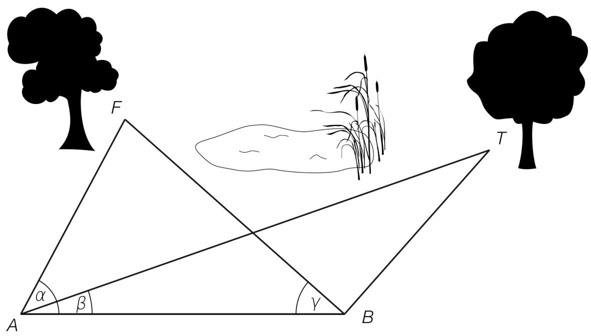
**2)** Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Strecke $AB$ kürzer als der Kreisbogen von $A$ nach $B$ ist.

**5.11**

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Entfernung zwischen zwei Punkten $F$ und $T$ kann wegen eines dazwischenliegenden Teichs nicht direkt gemessen werden. Zur Berechnung der Entfernung werden zunächst von der 10 m langen Standlinie $AB$ die folgenden Winkel gemessen:

$$\alpha = 75°,\ \beta = 35°,\ \gamma = 60°$$




**1)** Berechnen Sie die Entfernung $\overline{AF}$.

**2)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von $\overline{FT}$ auf, wenn $\overline{AT}$ und $\overline{AF}$ bereits ermittelt wurden.

## 5.12



Die Grundfläche eines Fertigbetonelements hat die Form eines Dreiecks mit den Seiten $a$, $b$ und $c$, von dem die folgenden Informationen bekannt sind:

- Der Umfang beträgt 150 cm.
- Die Seite $c$ ist doppelt so lang wie die Seite $a$.
- Die Seite $b$ ist um 10 cm länger als die Seite $a$.

**1)** Erstellen Sie ein Gleichungssystem mit den Unbekannten $a$, $b$ und $c$, um die Seitenlängen des angegebenen Dreiecks zu bestimmen.

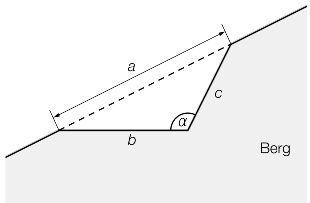
**2)** Berechnen Sie die Seitenlängen des Dreiecks.

**3)** Berechnen Sie den größten Winkel in diesem Dreieck.

## 5.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Straßenabschnitt soll an einem Berghang entlangführen. Der Querschnitt der geplanten Trasse ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt. Die Seite $b$ ist 15 m und die Seite $c$ ist 11,8 m lang. Der Winkel beträgt $\alpha = 116{,}6°$.



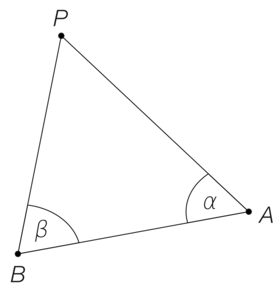

**1)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des von $a$, $b$ und $c$ eingeschlossenen Dreiecks.

**2)** Berechnen Sie die Länge der Seite $a$.

## 5.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Entfernungen werden beim Segeln in nautischen Meilen (NM) angegeben. Die davon abgeleitete Geschwindigkeitseinheit nautische Meilen pro Stunde wird Knoten genannt.
Ein Segelboot fährt, nachdem es vom Punkt $P$ gestartet ist und den Punkt $A$ passiert hat, zum Punkt $B$.
Von dort fährt es zum Punkt $P$ zurück (siehe nachstehende nicht maßstabgetreue Skizze).
Die folgenden Abmessungen sind bekannt: $\alpha = 63°$, $\overline{PA} = 3{,}3\,\text{NM}$ und $\overline{AB} = 2{,}7\,\text{NM}$




**1)** Berechnen Sie die Entfernung $\overline{BP}$.

**2)** Berechnen Sie die Dauer dieser Umrundung, wenn das Segelboot mit einer mittleren Geschwindigkeit von 6,8 Knoten fährt.

**3)** Stellen Sie eine Formel zur Berechnung der Entfernung $\overline{BP}$ auf, wenn anstatt der Entfernung $\overline{AB}$ der Winkel $\beta$ bekannt wäre.

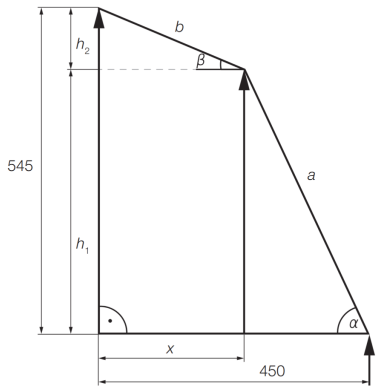
$\overline{BP} =$ ____________________

## 5.15



Farst ist eine hoch gelegene Siedlung im Tiroler Ötztal.
Der Verlauf der Hochspannungsleitung vom Talboden nach Farst ist in der nebenstehenden Abbildung vereinfacht dargestellt. (Maße in m)
Die Höhenwinkel betragen $\alpha = 65°$ und $\beta = 22{,}5°$.

**1)** Berechnen Sie die Entfernungen $a$ und $b$ zwischen den Masten.

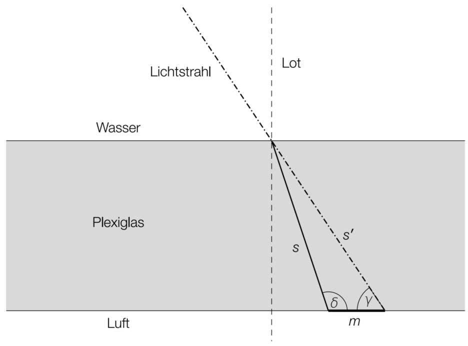



## 5.16



Die nebenstehende nicht maßstabgetreue Grafik zeigt den Verlauf eines Lichtstrahls, der auf die Plexiglasscheibe einer Taucherbrille trifft. Das Lot ist hier eine Gerade, die normal auf die Plexiglasscheibe steht.
$s$ ... Weg, den der Lichtstrahl im Plexiglas zurücklegt
$s'$ ... Weg, den der Lichtstrahl ohne Ablenkung zurücklegen würde

Dabei gilt: $s = 4{,}52\,\text{mm}$ und $s' = 4{,}77\,\text{mm}$.
Außerdem kennt man den Winkel $\gamma = 57°$.



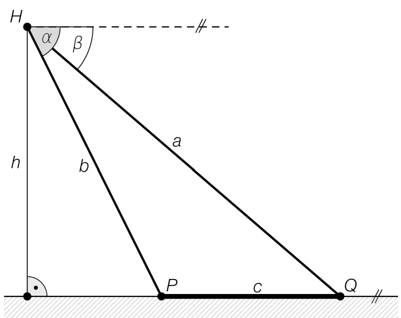

**1)** Berechnen Sie den stumpfen Winkel $\delta$.

**2)** Berechnen Sie die Länge der Strecke $m$.

## 5.17



Bei einer bestimmten Ballonfahrt wird vom Punkt $H$ aus der Punkt $P$ unter dem Tiefenwinkel $\alpha$ und der Punkt $Q$ unter dem Tiefenwinkel $\beta$ gesehen.




**1)** Ordnen Sie den beiden Streckenlängen jeweils den zutreffenden Ausdruck zu deren Berechnung aus A bis D zu.

| | |
|---|---|
| $b$ | |
| $h$ | |

| | |
|---|---|
| A | $a \cdot \sin(\beta)$ |
| B | $c \cdot \sin(\beta)$ |
| C | $\dfrac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$ |
| D | $\sqrt{a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)}$ |

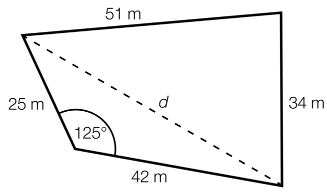
Gegeben sind die Winkel $\alpha = 65°$ und $\beta = 23°$ sowie die Streckenlänge $c = 2800\,\text{m}$.

**2)** Berechnen Sie $h$.

**5.18**



Ein Landwirt plant Neuerungen in der Bewässerung seiner Felder und eine Vergrößerung von Weideflächen, für die er einen Kredit benötigt.
Zur Vergrößerung seiner Weideflächen muss der Landwirt ein sumpfiges Landstück trockenlegen. Er möchte den Flächeninhalt des Grundstücks berechnen. Dazu misst er die Länge der Seiten und einen Winkel und fertigt die nebenstehende Skizze an.




**1)** Berechnen Sie die Länge der Diagonalen $d$.

**2)** Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstücks.

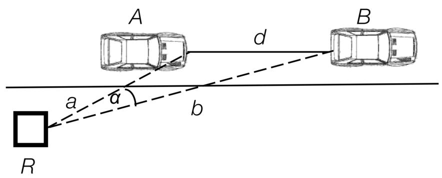
**5.19**



Der empfohlene Sicherheitsabstand, den Autofahrer/innen einhalten sollten, wird oft nach der „Halbe-Tacho-Regel“ bestimmt. Dabei wird die Hälfte der gefahrenen Geschwindigkeit in km/h als Richtwert für den Sicherheitsabstand in m angegeben. Zum Beispiel: Bei einer Geschwindigkeit von 100 km/h sollte der Abstand mindestens 50 m betragen. Für die Aufklärung der Ursache eines Verkehrsunfalls wird zur Überprüfung des Sicherheitsabstands das Foto einer Radarüberwachung (siehe unten stehende Skizze) herangezogen.

Die Geschwindigkeit des Autos $A$ wurde mit 108 km/h gemessen. Der Abstand $a$ zwischen dem Radargerät und dem Auto $A$ betrug 14 m. Die Strecke $b$ vom Radargerät zum Auto $B$ betrug 55 m. Der Winkel $\alpha$ ist 11°.

**1)** Überprüfen Sie durch Berechnung von $d$, ob der Sicherheitsabstand im Sinne der Halbe-Tacho-Regel eingehalten wurde.




**5.20**



Bei einem Puzzleteil wird die Ziffer 1 wie abgebildet dargestellt.

**1)** Berechnen Sie den Winkel $\alpha$.

**2)** Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Ziffer 1 vom Puzzleteil.

$a = 13\,\text{cm}$

$b = 6\,\text{cm}$

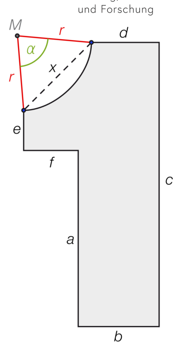
$c = 21\,\text{cm}$

$d = 5\,\text{cm}$

$e = 3\,\text{cm}$

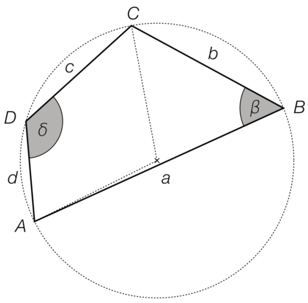
$f = 4\,\text{cm}$

$r = 5{,}5\,\text{cm}$



**5.21**

Ein Sehnenviereck ist ein Viereck, dessen Eckpunkte auf einem Kreis liegen, dem Umkreis des Vierecks.
In einem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel jeweils 180°.




Eine Terrasse hat die Form eines Sehnenvierecks mit den Seitenlängen $a = 27$ m, $b = 13{,}5$ m, $c = 15$ m und $d = 9$ m.

**1)** Stellen Sie eine Formel auf, mit der man den Winkel $\beta$ aus den Größen $a$, $b$, $c$ und $d$ berechnet.

$\beta =$ __________________________________

**2)** Berechnen Sie den Flächeninhalt der Terrasse.

**5.1** $h \approx 12{,}19$ m
**5.2** $u \approx 32{,}30$ cm
**5.3** $\beta = 77{,}77\ldots°$
**5.4** **1)** $\alpha = 46{,}42\ldots°$ **2)** $g = 5{,}071\ldots$ m
**5.5** $0{,}533\ldots \text{ m}^2$
**5.6** **1)** $\alpha = 54{,}33\ldots°$
**5.7** **1)** Der Zaun muss rund 207,6 m lang sein.
**2)** Bei Verdoppelung aller Seitenlängen bleiben die Winkel gleich.
$$A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \sin(\alpha)}{2}, \quad A_{\text{neu}} = \frac{2 \cdot \overline{AB} \cdot 2 \cdot \overline{BC} \cdot \sin(\alpha)}{2} = 4 \cdot A$$
**5.8** $\omega = 86{,}94\ldots°$
**5.9** **1)** $c = 7{,}07\ldots$ cm **2)** $\alpha = 116{,}2\ldots°$
**5.10** **1)** $\alpha = 23{,}71\ldots°$ **2)** Die Streckenlänge AB ist um rund 0,71 % kürzer als der Kreisbogen $b$.
**5.11** **1)** $\overline{AF} = 12{,}24\ldots$ m **2)** $\overline{FT} = \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{AT}^2 - 2 \cdot \overline{AF} \cdot \overline{AT} \cdot \cos(\alpha - \beta)}$
**5.12** **1)** $\text{I}: a + b + c = 150 \quad \text{II}: c = 2 \cdot a \quad \text{III}: b = a + 10$ **2)** $a = 35$ cm, $b = 45$ cm, $c = 70$ cm **3)** $\gamma \approx 121{,}6°$
**5.13** **1)** $79{,}13\ldots \text{ m}^2$ **2)** $a = 22{,}86\ldots$ m
**5.14** **1)** $\overline{BP} = 3{,}176\ldots$ NM **2)** 1,349 h **3)** $\overline{BP} = \frac{\overline{PA} \cdot \sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$
**5.15** $a = 490{,}3\ldots$ m $b = 262{,}7\ldots$ m
**5.16** **1)** $\delta = 117{,}74\ldots°$ **2)** $m = 0{,}493\ldots$ mm
**5.17** **1)** Oben: $D$, Unten: $A$ **2)** $h = 1481{,}8\ldots$ m
**5.18** **1)** $d = 59{,}9\ldots$ m **2)** $1296{,}0\ldots \text{ m}^2$
**5.19** $d = 41{,}3\ldots$ m Der eingeforderte Sicherheitsabstand von 54 m wurde also nicht eingehalten.
**5.20** **1)** $\alpha = 80{,}0\ldots°$ **2)** $\approx 139{,}3 \text{ cm}^2$
**5.21** **1)** $\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot c \cdot d}\right)$ **2)** $198{,}6\ldots \text{ m}^2$

## 6. Summensätze für Winkelfunktionen

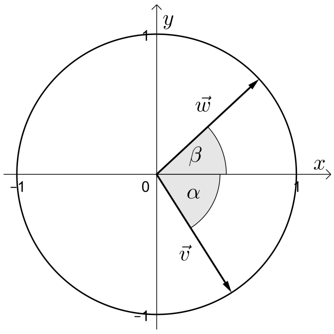
MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Summensätze für Winkelfunktionen

### 6.1

Gegeben sind zwei Winkel $\alpha$ und $\beta$ mit $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$.
Rechts sind zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ im Einheitskreis dargestellt.




**a)** Drücke ihre Komponenten mithilfe von $\alpha$ und $\beta$ aus.

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

**b)** Zeige mit der Vektor-Winkel-Formel den folgenden Summensatz:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

Tatsächlich gilt diese Summenformel für beliebige Winkel $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

### 6.2

Es gelten die folgenden Summensätze:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \quad \text{und} \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

**a)** Stelle mithilfe von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ einen Term zur Berechnung von $\sin(2 \cdot \alpha)$ auf:

$$\sin(2 \cdot \alpha) = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

**b)** Stelle mithilfe von $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ einen Term zur Berechnung von $\cos(2 \cdot \alpha)$ auf:

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \boxed{\phantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx}}$$

### 6.3

Folgere aus den Summensätzen in Aufgabe 6.2 die folgenden Summensätze:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\beta) \cdot \cos(\alpha)$$

### 6.4

Zeige, dass

$$\sin(\alpha + 90°) - \sin(\alpha - 90°) = 2 \cdot \cos(\alpha)$$

für alle Winkel $\alpha$ gilt.

**6.5** MmF

Zeige, dass die Halbwinkelformeln

$$\cos^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1+\cos(\gamma)}{2} \quad \text{und} \quad \sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1-\cos(\gamma)}{2}$$

gelten. Verwende diese Formeln, um ohne Taschenrechner $\sin(15^\circ)$ und $\cos(15^\circ)$ zu berechnen.

Anmerkung: Die Ergebnisterme dürfen Wurzeln enthalten.

**6.6** MmF

Zeige, dass die trigonometrischen Identitäten

$$\frac{\cos(\alpha)+\cos(\beta)}{2} = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \quad \text{und}$$
$$\frac{\sin(\alpha)+\sin(\beta)}{2} = \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

gelten.

**6.7** MmF

Zeige, dass die trigonometrischen Identitäten

$$\cos(2\cdot x) = \frac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)} \quad \text{und} \quad \sin(2\cdot x) = \frac{2\cdot\tan(x)}{1+\tan^2(x)}$$

gelten.

**6.8** MmF

Verwende geeignete Dreiecke, um die Werte von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\tan(\alpha)$ in den folgenden Fällen zu berechnen.

Anmerkung: Die Ergebnisterme dürfen Wurzeln enthalten.

**a)** $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad **b)** $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad **c)** $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad **d)** $\alpha = \frac{\pi}{8}$ rad **e)** $\alpha = \frac{\pi}{12}$ rad

Tipp: Bei **d)** und **e)** kann man sich mit einem gleichschenkeligen Dreieck mit Öffnungswinkel $2\cdot\alpha$ und Schenkeln der Länge 1 helfen.

**6.1** **a)** $\vec{v} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ -\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ $\vec{w} = \begin{pmatrix}\cos(\beta)\\ \sin(\beta)\end{pmatrix}$ **b)** $\cos(\alpha+\beta) = \frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|} = \cdots = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

**6.2** **a)** $\sin(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$ **b)** $\cos(2\cdot\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

**6.3** Hinweis: Verwende i) $\sin(-\gamma) = -\sin(\gamma)$ ii) $\cos(-\gamma) = \cos(\gamma)$ iii) $\cos(\gamma - \frac{\pi}{2}) = \sin(\gamma)$ iv) $\sin(\gamma - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\gamma)$ (Einheitskreis)

**6.4** $\sin(\alpha + 90^\circ) = \sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(90^\circ)}_{=0} + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\sin(90^\circ)}_{=1} = \cos(\alpha)$

$\sin(\alpha - 90^\circ) = \sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(-90^\circ)}_{=0} + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\sin(-90^\circ)}_{=-1} = -\cos(\alpha)$

$\implies \sin(\alpha + 90^\circ) - \sin(\alpha - 90^\circ) - 2\cdot\cos(\alpha) = 0$

**6.5** Hinweis: Verwende $\cos(\gamma) = \cos(\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2})$ und $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ $\sin(15^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$ $\cos(15^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}$

**6.6** Hinweis: Verwende die Summensätze und die Halbwinkelformeln.

**6.7** Hinweis: Verwende für die erste Identität $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ und die Halbwinkelformeln.
Verwende für die zweite Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ und die Summensätze.

**6.8** **a)** $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**b)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**c)** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

**d)** $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

**e)** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$