KOMPETENZHEFT ZU GRENZWERTEN

1. Aufgabenstellungen

Aufgabe 1.1. Es gibt viele verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von ε-Umgebungen.

a) Schreibe die Lösungsmenge der Betragsungleichung $|x-3|<2$ als Intervall an, und stelle sie grafisch auf der Zahlengerade dar.

b) Alle Lösungen von $|x+2|<1{,}5$ bilden zusammen eine ε-Umgebung einer Zahl a.
Wie groß ist ε, und welche Zahl ist a?

c) Alle Lösungen x der Ungleichung

$$-0{,}32<x<0{,}28$$

bilden zusammen eine ε-Umgebung einer Zahl a. Wie groß ist ε, und welche Zahl ist a?

Aufgabe 1.2. Gegeben ist die Folge $a_n = 3 - \dfrac{100}{n}$.

a) Was ist der Grenzwert der Folge?

b) Ab welchem Index sind die Folgenglieder kleiner als
1) $\varepsilon = 1$ **2)** $\varepsilon = 0{,}1$ **3)** $\varepsilon = 0{,}01$
vom Grenzwert entfernt?

Aufgabe 1.3. Gegeben ist die Folge $a_n = \dfrac{42}{n^3} - 12$.

a) Was ist der Grenzwert der Folge?

b) Ab welchem Index ist der Abstand der Folgenglieder vom Grenzwert kleiner als $\varepsilon = 0{,}001$?

Aufgabe 1.4. Gegeben ist die Folge $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 5$.

a) Begründe, warum die Folge weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

b) Ab welchem Index sind die Folgenglieder innerhalb einer Toleranz von $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vom Grenzwert 5?

Aufgabe 1.5. Berechne den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$.

a) $a_n = \dfrac{42}{n^2}$ **b)** $a_n = 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ **c)** $a_n = \sqrt{4 - \dfrac{5}{n^3}}$ **d)** $a_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{1}{n^2} - 6}$

Aufgabe 1.6. Berechne den Grenzwert der Folge $\langle b_n \rangle$.

a) $b_n = \dfrac{-4 \cdot n^3 + 5 \cdot n^2 - n}{2 \cdot n^3 - 1}$ **b)** $b_n = \dfrac{3 \cdot n^3 + n^2 - n}{2 \cdot n^4 - 3 \cdot n^2 + 1}$ **c)** $b_n = \dfrac{2 \cdot n^4 - n + 2}{-5 \cdot n^3 - 1}$

Datum: 12. Januar 2018.

Aufgabe 1.7. Berechne den Grenzwert der Folge $\langle c_n \rangle$.

a) $c_n = \sqrt{\dfrac{n^5+2}{4 \cdot n^5 - n^3 + 1}}$ **b)** $c_n = \dfrac{4 + n - 3 \cdot n^2}{7 \cdot n - 2}$ **c)** $c_n = \dfrac{0{,}3^n - 2}{1{,}1^n + n^2}$

Aufgabe 1.8. Gegeben ist die Folge $a_n = 1{,}01^n$.

a) Ab welchem Index sind die Folgenglieder größer als $M = 1\,000\,000$?

b) Erkläre, warum die Folge jede noch so große Schranke ab einem gewissen Folgenglied für immer überschreitet. Diesen Sachverhalt drücken wir kurz so aus: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

Aufgabe 1.9. Hat die geometrische Folge $\langle b_n \rangle$ einen Grenzwert?
Hat die zugehörige Folge der Teilsummen $\langle s_n \rangle$ einen Grenzwert? Falls ja, wie groß ist die Summe $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$?

a) $\langle b_n \rangle = \langle 8, 4, 2, 1, \ldots \rangle$ **b)** $\langle b_n \rangle \langle 42, 42, 42, \ldots \rangle$ **c)** $\langle b_n \rangle = \left\langle \frac{27}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4} \ldots \right\rangle$

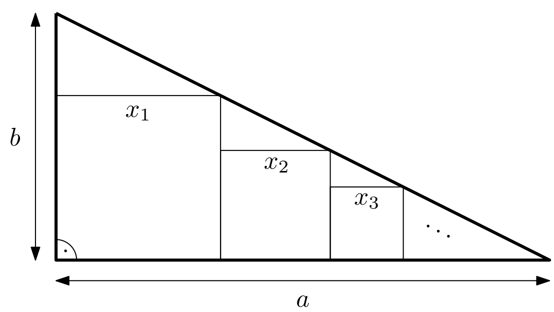
Aufgabe 1.10. ☆ Wir schreiben einem rechtwinkligen Dreieck Quadrate ein:

a) Wie lang ist x_1 in Abhängigkeit von a und b?

b) Wie rechts dargestellt, schreiben wir immer wieder rechts angrenzend ein Quadrat ein. Erkläre, warum $\langle x_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $q = \frac{a}{a+b}$ ist.

c) Welches Ergebnis erwartest du für $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$? Rechne nach, dass die geometrische Reihe tatsächlich diese Summe hat.

d) Finde eine Formel für die Summe aller Quadratflächen.

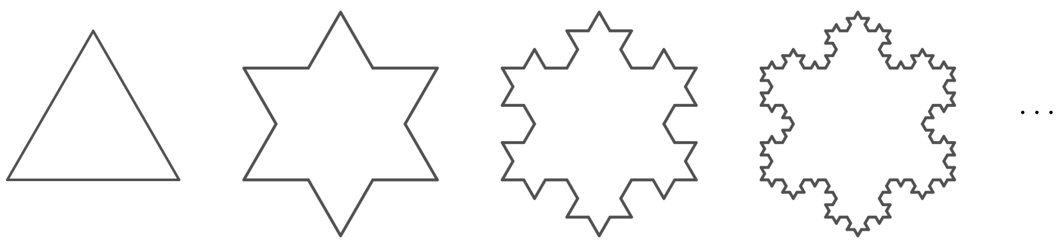


Aufgabe 1.11. Es gibt geometrische Figuren mit endlichem Flächeninhalt, aber unendlichem Umfang. Für die *Kochsche Schneeflocke* starten wir mit einem gleichseitigen Dreieck und wiederholen immer wieder die folgenden drei Schritte:

1) Teile jede Seite in drei gleich lange Teile.

2) Ergänze jeweils den mittleren Teil nach außen zu einem gleichseitigen Dreieck.

3) Entferne den mittleren Teil.



Der Umfang der ersten Figur beträgt $u_1 = 3 \cdot a$.

a) Erkläre, warum die Umfänge $\langle u_1, u_2, u_3, \ldots \rangle$ eine geometrische Folge mit $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$ bilden.

b) Erkläre, warum daraus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ folgt.

c) Zu Beginn beträgt der Flächeninhalt $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Finde eine Formel für den Flächeninhalt A_n nach n Durchläufen der drei Schritte **1)**, **2)**, **3)**. ☆

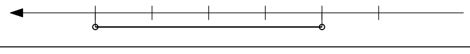
d) Eine mögliche Formel für A_n ist

$$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right).$$

Erkläre damit die folgende Formel für den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke:

$$A = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot a^2.$$

1.1 a) $]1;5[$



b) $\varepsilon = 1{,}5,\ a = -2$

c) $\varepsilon = 0{,}3,\ a = -0{,}02$

1.2 a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 3$ **b) 1)** Ab dem 101. Folgenglied. **2)** Ab dem 1001. Folgenglied. **3)** Ab dem 10 001. Folgenglied.

1.3 a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -12$ **b)** Ab dem 35. Folgenglied.

1.4 a) Wenn n gerade ist, dann ist $a_n > 5$. Wenn n ungerade ist, dann ist $a_n < 5$. Die Folgenglieder werden also immer abwechselnd größer und wieder kleiner.

b) Ab dem 11. Folgenglied.

1.5 a) 0 **b)** 3 **c)** 2 **d)** $-\frac{1}{2}$

1.6 a) -2 **b)** 0 **c)** $-\infty$

1.7 a) $0{,}5$ **b)** $-\infty$ **c)** 0

1.8 a) Ab dem 1389. Folgenglied. **b)** Wenn $n > \frac{\log(M)}{\log(1{,}01)}$ ist, dann ist $a_n > M$.

1.9 a) $q = 0{,}5 \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \implies b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 16$.

b) $q = 1 \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 42$. $\langle s_n \rangle$ konvergiert gegen ∞.

c) $q = -\frac{1}{3} \implies \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \implies b_1 + b_2 + b_3 + \dots = 5{,}0625$.

1.10 a) $x_1 = \frac{a \cdot b}{a+b}$

b) $x_2 = \frac{(a-x_1)\cdot x_1}{a} = \frac{(a-x_1)\cdot a \cdot b}{a\cdot(a+b)} = \dots = x_1 \cdot \frac{a}{a+b}$

c) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \frac{x_1}{1-\frac{a}{a+b}} = \dots = a$

d) $A = \frac{a^2 \cdot b}{2a+b}$

1.11 a) Die Seitenlängen werden mit jedem Schritt auf ein Drittel der vorherigen Seitenlänge gekürzt. Die Anzahl der Seiten vervierfacht sich (jede Seite wird in vier neue Seiten verwandelt).

Für den Umfang gilt also: $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$. $\langle u_n \rangle$ ist also eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$, weil $q = \frac{4}{3} > 1$ ist.

c) Wie viele Seiten gibt es nach n Durchläufen?

Wie viele neue Dreiecke entstehen beim n-ten Durchlauf?

Wie groß ist der Flächeninhalt der neuen Dreiecke beim n-ten Durchlauf?

Um wie viel wächst der Flächeninhalt also beim n-ten Durchlauf?

d) $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = A_0 \cdot \frac{8}{5} = \frac{2\cdot\sqrt{3}}{5} \cdot a^2$.

2. Eine lange Reise

Bei Grenzwerten geht es darum zu verstehen, wie sich Folgen *schließlich* verhalten.

Wir beginnen damit, zwei wichtige Begriffe für Folgen in Erinnerung zu rufen.

Monotonie

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt …

… **streng monoton wachsend**, wenn $\boldsymbol{a_{n+1} > a_n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

… **monoton wachsend**, wenn $\boldsymbol{a_{n+1} \geq a_n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

… **streng monoton fallend**, wenn $\boldsymbol{a_{n+1} < a_n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

… **monoton fallend**, wenn $\boldsymbol{a_{n+1} \leq a_n}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

Konstante Folgen

Gibt es Folgen, die gleichzeitig monoton wachsend und monoton fallend sind?

Auf und ab

Gibt es Folgen, die weder monoton wachsend noch monoton fallend sind?

Beschränktheit

Eine Folge $\langle x_n \rangle$ heißt **nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl a gibt, sodass

$$\boldsymbol{a \leq x_n} \qquad \text{für alle } n \geq 1 \text{ gilt.}$$

a nennen wir dann eine **untere Schranke**.

Die Folge heißt **nach oben beschränkt**, wenn es eine Zahl b gibt, sodass

$$\boldsymbol{x_n \leq b} \qquad \text{für alle } n \geq 1 \text{ gilt.}$$

b nennen wir dann eine **obere Schranke**.

Gibt es Zahlen a und b mit

$$\boldsymbol{a \leq x_n \leq b} \qquad \text{für alle } n \geq 1,$$

sagen wir, dass $\langle x_n \rangle$ eine **beschränkte Folge** ist. Alle Folgenglieder liegen dann im Intervall $[a; b]$.

Es gibt *Grenzwerte* von Folgen, die du schon kennst oder schon als solche vermutest.
Wir geben einige Beispiele.

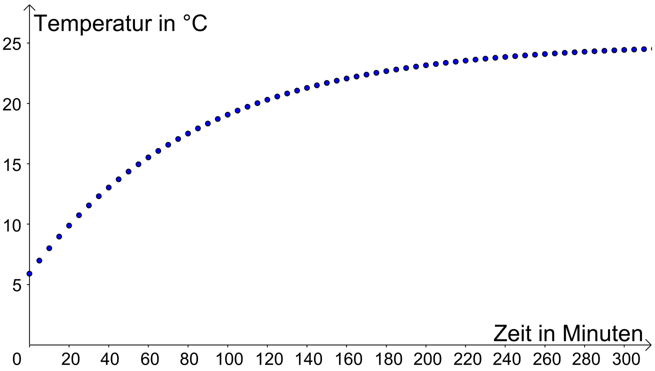
Für die Wissenschaft

An einem Sommertag nimmt Lukas in wissenschaftlicher Absicht ein Getränk aus dem Kühlschrank und stellt es auf den Küchentisch. Alle 5 Minuten misst er die Temperatur des Getränks.

Die Messergebnisse sind rechts abgebildet. Stimmt der Verlauf mit deiner Erwartung überein?

Die Folge der Messwerte $\langle T_1, T_2, T_3, \ldots \rangle$ ist streng monoton wachsend. Die Temperatur wird aber nicht beliebig groß sondern nähert sich einem bestimmten Wert an.

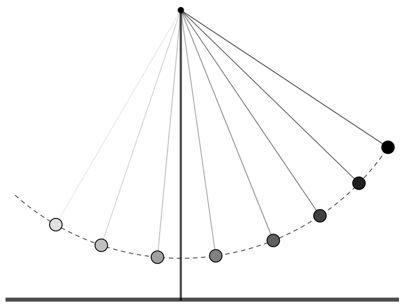
Was ist dieser *Grenzwert*?

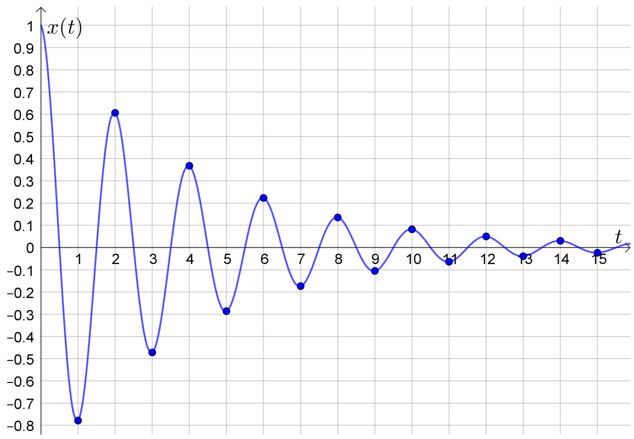


Gedämpfte Schwingung

Ein Pendel schwingt hin und her. Die horizontale Auslenkung aus der Ruheposition zum Zeitpunkt t geben wir mit $x(t)$ an.

Die *maximale* Auslenkung wird aufgrund der Reibung bei jedem Schwung kleiner.





Links siehst du den Graphen der Funktion.
Ist der Graph so, wie du ihn erwarten würdest?

Lies die ersten acht Folgenglieder von $\langle x_n \rangle$ mit $x_n = x(n)$ ab. Runde auf eine Nachkommastelle.

Was meinst du ist der Grenzwert der Folge?

Eine Folge muss nicht monoton sein, um einen Grenzwert zu haben.

Auch hier die richtige Antwort.

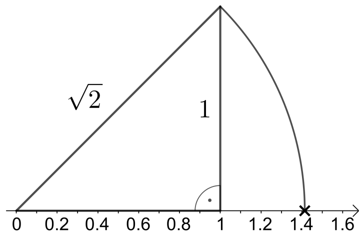
Eine Folge kann ihren Grenzwert selbst auch enthalten:
Den Grenzwert der konstanten Folge $\langle 42, 42, 42, 42, \ldots \rangle$ kannst du auf einen Blick erraten.

Ein Spaziergang auf der Zahlengerade.

Mit Lineal und Zirkel finden wir $\sqrt{2}$ ohne Weiteres auf der Zahlengerade. Wie funktioniert das aber mit der Dezimaldarstellung? Weil $\sqrt{2}$ irrational ist, geht die Dezimaldarstellung

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$$

nie in eine Periode über. Wir brauchen alle Nachkommastellen.



Wir betrachten die Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ mit

$$a_1 = 1{,}4 \qquad a_2 = 1{,}41 \qquad a_3 = 1{,}414 \qquad a_4 = 1{,}4142 \qquad \ldots \qquad a_8 = 1{,}41421356 \qquad \ldots$$

Bei a_n schneiden wir also die Dezimaldarstellung von $\sqrt{2}$ nach der n-ten Nachkommastelle ab.

Stelle dir die Folge als einen Spaziergang auf der Zahlengerade vor. 1 Schritt entspricht 1 Einheit. Wir beginnen bei 1 und machen 4 Zehntelschritte nach rechts. Jetzt sind wir bei $a_1 = 1 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}4$. In der zweiten Etappe machen wir nur einen Hundertstelschritt: $a_2 = 1{,}4 + 0{,}01 = 1{,}41$. Es geht mit 4 Tausendstelschritten weiter: $a_3 = a_2 + 4 \cdot 0{,}001 = 1{,}41 + 0{,}004 = 1{,}414$. Was nun?

$$a_5 = a_4 + \underline{\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad} \,.$$

Erklären, warum a_1 weniger als $10^{-1} = 0{,}1$ von $\sqrt{2}$ entfernt ist. $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

Erkläre, warum a_2 weniger als $10^{-2} = 0{,}01$ von $\sqrt{2}$ entfernt ist. $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Wie nahe liegt a_{99} an $\sqrt{2}$? Gib eine Abschätzung an.

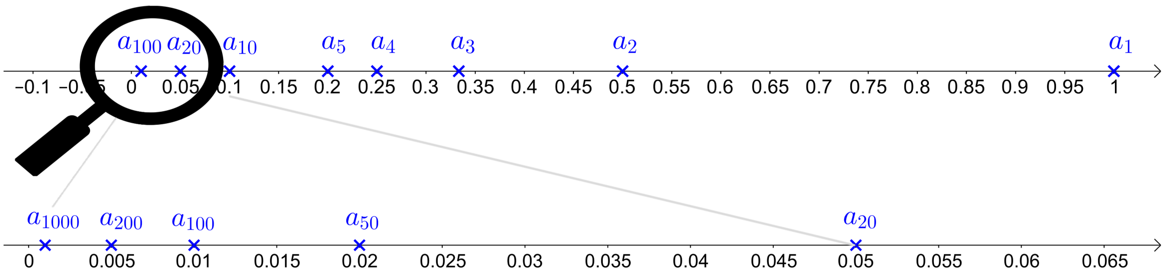
Ist die Folge $\langle a_n \rangle$ (streng) monoton wachsend?

Ziel dieses langen Spaziergangs – also der Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ – ist $\sqrt{2}$.

Wir beginnen jetzt, *mathematisch exakt* über Grenzwerte von Folgen zu sprechen.

Wenn wir nach dem Grenzwert einer Folge fragen, kümmern uns die ersten Folgenglieder gar nicht. Wir wollen vielmehr wissen, wohin die Reise schließlich geht.

Nehmen wir zum Beispiel die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ genauer unter die Lupe:



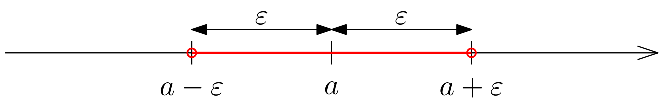
Wir vermuten, dass $a = 0$ der Grenzwert der Folge sein könnte. Sehen wir uns in der Nähe von 0 genauer um.

ε-Umgebung

Wir wählen eine Zahl a auf der Zahlengerade und eine positive Zahl ε.

Wir denken bei ε an etwas Kleines, z.B. $\varepsilon = 0{,}1$.

Die **ε-Umgebung von a** besteht aus allen Zahlen, deren Abstand von a kleiner als ε ist:



Anders gesagt

Mathematisch können wir die ε-Umgebung von a auf mehrere Arten beschreiben. Erkläre:

- Die ε-Umgebung von a ist genau das Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$.
- Die ε-Umgebung von a sind genau die Lösungen x der Ungleichung
$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$
- Die ε-Umgebung von a sind genau die Lösungen x der Betragsungleichung $|x-a| < \varepsilon$.

$|x-a|$ ist ja genau der Abstand von x zu a.

Fehlertoleranz

Mit dem griechischen Buchstaben ε (sprich *Epsilon*) wird an das Englische ***e**rror* erinnert, also einen Fehler im Sinne einer Fehlertoleranz. Das Intervall $]a-\varepsilon; a+\varepsilon[$ enthält neben a auch alle Punkte, die nahe an a dran sind. Die Punkte in diesem Intervall verfehlen a um weniger als ε.

Sei nun $\langle a_n \rangle$ eine unendliche Folge. Was heißt es, dass die Zahl a der Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle$ ist?

Grenzwert einer Folge in Worten

Zu jeder noch so kleinen Umgebung vom Grenzwert finden wir einen Index, ab dem die Folgenglieder in besagter Umgebung des Grenzwerts liegen.

Grenzwert einer Folge mit Hilfe von Formeln

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index n_ε, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ gilt
$$|a_n - a| < \varepsilon.$$
Wir schreiben $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a}$ oder kürzer $\boldsymbol{a_n \to a}$.
Wir sagen auch: *„Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist **konvergent**. Sie konvergiert gegen a.“*

Dolmetschen

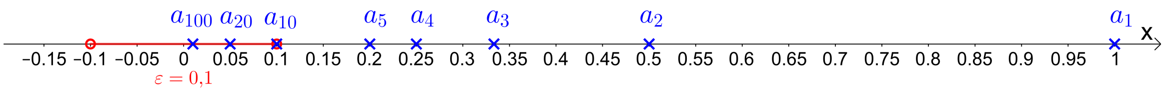
Vergleiche die beiden Formulierungen des Grenzwertbegriffs, und ordne entsprechende Formulierungsteile einander zu.

Lateinisch *convergere* heißt *sich annähern*.

Nullfolge

Ist der Grenzwert a gleich 0, dann nennen wir die Folge $\langle a_n \rangle$ auch eine **Nullfolge**.

Beispiel 2.1. Wir überprüfen, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ tatsächlich eine Nullfolge ist.



Lösung. Wir müssen also zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ ein Folgenglied angeben, ab dem alle Glieder in der ε-Umgebung von 0 liegen. Wir fragen uns also: Für welche n gilt $-\varepsilon < \frac{1}{n} < \varepsilon$?

0

Erkläre, warum die Bedingung $-\varepsilon < \frac{1}{n}$ bereits ab dem ersten Folgenglied erfüllt ist.

Ab welcher Zahl n die Bedingung $\frac{1}{n} < \varepsilon$ erfüllt ist, hängt von ε ab.
Ist zum Beispiel $\varepsilon = \frac{1}{10}$, dann gilt

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{10} \qquad \iff \qquad 10 < n.$$

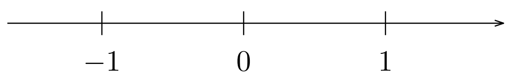
Ab dem 11. Folgenglied liegen also alle Glieder in der ε-Umgebung $]-0{,}1; 0{,}1[$.
Diese Rechnung funktioniert für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \iff \quad 1 < n \cdot \varepsilon \quad \iff \quad n > \frac{1}{\varepsilon}\,.$$

Die Zahl $\frac{1}{\varepsilon}$ ist positiv und reell. Als Punkt auf der Zahlengerade liegt sie also irgendwo rechts von der 0.
Wir runden $\frac{1}{\varepsilon}$ zur nächstgrößeren natürlichen Zahl auf. Diese Zahl nennen wir n_ε. Nochmal weiter rechts.
Ab diesem Index n_ε liegen alle Folgenglieder in der ε-Umgebung $]-\varepsilon; \varepsilon[$ von 0.
Wir haben jetzt brav nachgerechnet, dass unser Verdacht auch formal stimmt: Es gilt $\frac{1}{n} \to 0$. □

Folge ohne Grenzwert

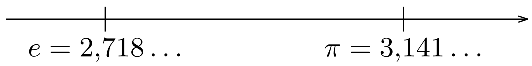
Michael behauptet, die Folge $\langle (-1)^n \rangle$ hat Grenzwert 0.
Lucia wirft ein, dass dann ja ab einem bestimmten Index **alle** Folgenglieder im Intervall $]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}[$ liegen müssten.



Das gibt Michael ordentlich zu denken. Kann 0 Grenzwert der Folge sein? Hat denn die Folge $\langle (-1)^n \rangle$ überhaupt einen Grenzwert?

Es kann nur einen geben.

Von einer bestimmten Folge $\langle a_n \rangle$ wissen wir, dass sie konvergent ist.
Emil behauptet, der Grenzwert ist $e = 2{,}7182\ldots.$ Pia ist sicher, dass $\pi = 3{,}1415\ldots$ der Grenzwert ist. Können Emil und Pia beide Recht haben?



Der Grenzwert einer konvergenten Folge ist eindeutig.

Beispiel 2.2. Die Folge $\langle a_n \rangle$ mit expliziter Darstellung $a_n = 42 + \frac{(-1)^n}{7\cdot n}$ konvergiert gegen 42.
Ab welchem Folgenglied liegen alle Glieder in der ε-Umgebung von 42 mit $\varepsilon = 0{,}001$?

Lösung. Für welche Zahlen n ist der Abstand von a_n zu 42 kleiner als $\varepsilon = 0,001$?
Wir suchen also genau die Lösungen der Betragsungleichung

$$|a_n - 42| < \varepsilon\,.$$

Wir setzen für a_n ein:

$$\begin{aligned}
&\left|42 + \frac{(-1)^n}{7\cdot n} - 42\right| < 0{,}001 \\
\iff\quad &\left|\frac{(-1)^n}{7\cdot n}\right| < 0{,}001 \qquad \text{Warum ist } |(-1)^n| = 1? \\
\iff\quad &\frac{1}{7\cdot n} < 0{,}001 \\
\iff\quad &n > 142{,}8\ldots
\end{aligned}$$

Ab dem 143. Folgenglied sind alle Glieder weniger als 0,001 von 42 entfernt. □

Der einfache Weg

Marcel hat genug vom Rechnen und fragt nach:
„Warum kann ich nicht einfach ein paar große Zahlen für n in den Taschenrechner einsetzen? Dann sehe ich den Grenzwert sofort und spare mir die Rechnerei mit den ε-Umgebungen.“
Für eine erste Vermutung, welche Zahl der Grenzwert sein könnte, ist diese Methode in vielen Fällen hilfreich. Auf daraus gewonnene Vermutungen sollten wir uns aber nicht blind verlassen.
Setzen wir zum Beispiel bei $a_n = \cos(n\cdot\pi)$ ohne genau hinzusehen ein:

$$a_{10} = 1,\quad a_{100} = 1,\quad a_{1000} = 1,\quad a_{10000} = 1,\quad a_{100000} = 1,\quad \ldots.$$

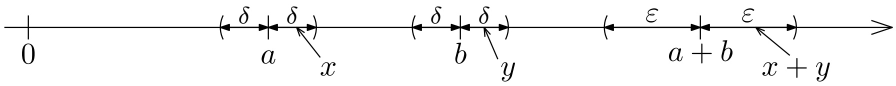
Wir könnten vermuten, dass alle Folgenglieder und der Grenzwert 1 sind. Warum stimmt das nicht?

Rundungsfehler beim Addieren

Du gehst im Supermarkt einkaufen. Jedes Mal, wenn du eine Ware in den Einkaufswagen legst, rundest du ihren Preis auf ganze Euro. Bei der Kassa zählst du insgesamt 10 Waren im Einkaufswagen. Die Summe der gerundeten Preise beträgt 30 €.
Mit wie viel Geld kommst du an der Kassa sicher aus? Wie viel Geld wirst du mindestens bezahlen?
Wenn du beim nächsten Mal wiederum 30 € als Summe der gerundeten Preise hast, möchtest du, dass der Gesamtpreis der 10 Waren sicher im Intervall [29 €; 31 €] liegt.
Auf welche Dezimalstelle solltest du die Einzelpreise nun runden?

Stetigkeit der Addition

Wir nehmen x aus $]a-\delta; a+\delta[$ und y aus $]b-\delta; b+\delta[$.



Wie würdest du $\delta > 0$ wählen, um sicher zu sein, dass $x+y$ in $](a+b)-\varepsilon; (a+b)+\varepsilon[$ liegt?

Grenzwert der Summe ist Summe der Grenzwerte

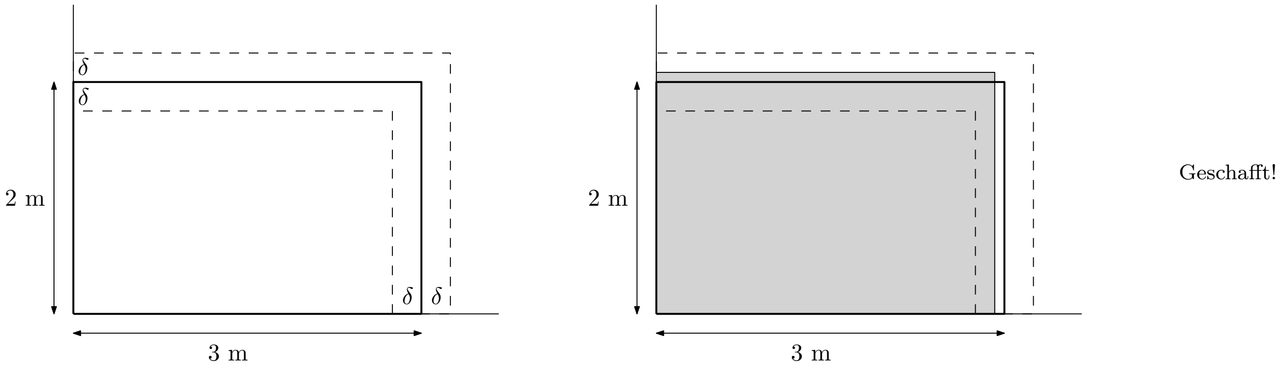
Angenommen wir wissen bereits, dass $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gelten.
Erkläre, weshalb die Folge $\langle a_n + b_n \rangle$ dann den Grenzwert $a+b$ hat.

Solche Geschichten beginnen immer mit: *Es war einmal ein* $\varepsilon > 0$.

Rundungsfehler beim Multiplizieren

Du möchtest aus einer rechteckigen Holzplatte eine Tischplatte mit Maßen $3\,\text{m} \times 2\,\text{m}$ zuschneiden. Bei sowas passieren freilich immer Fehler. Du bemühst dich aber, dass du dich sowohl bei der Länge x als auch bei der Breite y um weniger als eine kleine, positive Toleranz δ verschneidest:

$$3 - \delta < x < 3 + \delta \qquad \text{und} \qquad 2 - \delta < y < 2 + \delta.$$



Du verschneidest dich bei Länge und Breite um weniger als $\delta = 1\,\text{cm}$.
Welche Fläche hat die Tischplatte dann mindestens? Welche Fläche hat sie höchstens?
Wie klein muss δ sein, damit die Fläche sicher zwischen $5{,}9999\,\text{m}^2$ und $6{,}0001\,\text{m}^2$ ist?

Stetigkeit der Multiplikation

Wir fixieren zwei Zahlen a und b. Für jede „Produktfehlertoleranz" $\varepsilon > 0$ gibt es eine „Faktorenfehlertoleranz" $\delta > 0$, die Folgendes sicherstellt:
Für $x \in \,]a - \delta; a + \delta[$ und $y \in \,]b - \delta; b + \delta[$ ist $x \cdot y \in \,]a \cdot b - \varepsilon; a \cdot b + \varepsilon[$.

Wir haben für dich nachgerechnet, dass $\delta = \frac{\varepsilon}{2\cdot(1+|a|+|b|+\varepsilon)}$ klappt. Total verrückt.

Erkläre damit: Wenn $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gelten, dann gilt für die Produktfolge $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.

Grenzwertsätze

Wir haben zwei Folgen $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ von denen wir wissen, dass $a_n \to a$ und $b_n \to b$ gelten.
Dann können wir neue Folgen bilden und ihre Grenzwerte berechnen:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b.$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b.$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}\,.$ Falls $b_n \neq 0$, $b \neq 0$.

5) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + c) = a + c.$

6) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a.$

7) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}.$ Falls $a_n \geq 0$.

Du wirst gleich sehen, wie uns diese Grenzwertsätze viel Arbeit abnehmen.
Als *kleinster Baustein* hilft uns dabei häufig die Nullfolge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$.

Beispiel 2.3. Wir berechnen den Grenzwert der Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n^2} \right\rangle$.
Es ist $a_n = \frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$. Wegen Grenzwertsatz **3)** ist also

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{\textbf{3)}}{=} 0 \cdot 0 = 0.$$

Beispiel 2.4. Wir berechnen den Grenzwert der Folge $\langle b_n \rangle$ mit $b_n = \frac{1}{n^2} - \frac{6}{n} + 5$.
Es ist $b_n = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} - 6 \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + 5$, also

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + 5 = 5.$$

Welche Grenzwertsätze wurden hier alle verwendet?

Beispiel 2.5. Wir berechnen den Grenzwert der Folge $\langle c_n \rangle$ mit $c_n = \sqrt{\frac{4}{n^2} + 9}$.
Es ist $\frac{4}{n^2} + 9 = 4 \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0} + 9$, also

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \sqrt{4 \cdot 0 \cdot 0 + 9} = \sqrt{9} = 3.$$

Beispiel 2.6. Wir berechnen den Grenzwert von drei verschiedenen Folgen:

a) $a_n = \dfrac{3 \cdot n^2 + n - 5}{4 \cdot n^2 + 1}$ **b)** $b_n = \dfrac{3 \cdot n^2 + n - 5}{4 \cdot n^5 + 1}$ **c)** $c_n = \dfrac{3 \cdot n^3 + n - 5}{4 \cdot n^2 + 1}$

Lösung. Bei Folgen dieser Bauart heben wir zuerst im Zähler und Nenner die Potenz mit dem größten Exponenten heraus und kürzen:

a) $$a_n = \frac{3 \cdot n^2 + n - 5}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{n^2}{n^2} \cdot \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^2}} = \frac{3 + \overbrace{\frac{1}{n}}^{\to 0} - 5 \cdot \overbrace{\frac{1}{n^2}}^{\to 0}}{4 + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}}.$$ Also haben wir $a_n \to \frac{3}{4}$.

b) $$b_n = \frac{3 \cdot n^2 + n - 5}{4 \cdot n^5 + 1} = \frac{n^2}{n^5} \cdot \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^5}} = \underbrace{\frac{1}{n^3}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n} - 5 \cdot \frac{1}{n^2}}{4 + \frac{1}{n^5}}}_{\to \frac{3}{4}}.$$ Also ist $\lim_{n\to\infty} b_n = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0$.

c) $$c_n = \frac{3 \cdot n^3 + n - 5}{4 \cdot n^2 + 1} = \frac{n^3}{n^2} \cdot \frac{3 + \frac{1}{n^2} - \frac{5}{n^3}}{4 + \frac{1}{n^2}} = n \cdot \underbrace{\frac{3 + \frac{1}{n^2} - 5 \cdot \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{1}{n^2}}}_{\to \frac{3}{4}}.$$ Was nun, wenn $n \to \infty$ geht?

Unermesslich groß

Mit „ε-Umgebungen von ∞“ kommen wir nicht weit. Stattdessen meinen wir mit der Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \qquad \text{oder kurz} \qquad x_n \to \infty,$$

dass wir zu jeder noch so großen Zahl M einen Index finden können, ab dem alle Folgenglieder größer als M sind.

„$\infty \cdot \frac{3}{4} = \infty$“

Erkläre, warum die Folge $\langle x_n \rangle = \langle n \rangle$ den Grenzwert ∞ hat.
Die Folge $\langle y_n \rangle$ hat den Grenzwert $\frac{3}{4}$. Warum sind schließlich alle Folgenglieder größer als 0,5?

Erkläre, warum also $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \dfrac{3 + \frac{1}{n^2} - 5 \cdot \frac{1}{n^3}}{4 + \frac{1}{n^2}} = \infty$ gilt.

□

Schulden Ende nie

Was versteht man wohl unter $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = -\infty$? Warum ist also $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$?

Auf einen Blick

Schau dir die drei Folgen aus Beispiel 2.6 nochmal genau an.
Kannst du erklären, wie du den Grenzwert einer solchen Folge auf einen Blick erkennen kannst?
Welchen Grenzwert vermutest du also für

$$a_n = \frac{4 \cdot n^{15} + 1}{-2 \cdot n^{12} + n^3}, \quad b_n = \frac{4 \cdot n^{12} + 1}{-2 \cdot n^{15} + n^3} \quad \text{und} \quad c_n = \frac{4 \cdot n^{15} + 1}{-2 \cdot n^{15} + n^3} \ ?$$

Überprüfe deine Vermutung durch Herausheben der höchsten Potenzen in Zähler und Nenner.

Divergenz

Eine unendliche Folge, die keinen Grenzwert hat, nennen wir **divergent**.

Divergente Folgen

Die Glieder der Folge $\langle (-1)^n \cdot n \rangle = \langle -1, 2, -3, 4, -5, 6, ... \rangle$ durchbrechen betragsmäßig jede Schranke. Es ist aber weder ∞ noch $-\infty$ ein Grenzwert der Folge. Kannst du erklären warum?
Diese Folge hat keinen Grenzwert. Sie ist divergent.
Erklären, warum die Folge $\langle 0,\ 1,\ 0,\ 2,\ 0,\ 3,\ 0,\ 4,\ ... \rangle$ divergent ist.

Rechnen mit ∞

Antonia möchte wissen: *„Wenn $2 \cdot \infty = \infty$ und $-2 \cdot \infty = -\infty$ ist, was ist dann $0 \cdot \infty$?“*
Mile meint: *„Wir wissen doch schon seit langem, dass 0 mal irgendetwas immer 0 ergibt.“*
Was glaubst du?

Ausgang unbestimmt

Tatsächlich ist bei Ausdrücken der Bauart „$0 \cdot \infty$“ jedes Ergebnis möglich, wenn man mit Grenzwerten rechnet:

1) $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n}_{„=0\cdot\infty“} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1.$ **2)** $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot n}_{„=0\cdot\infty“} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$ **3)** $\underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot n^2}_{„=0\cdot\infty“} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty.$

Unbestimmte Ausdrücke

Ausdrücke der Bauart

$$\mathbf{0 \cdot \infty}, \quad \frac{\boldsymbol{\infty}}{\boldsymbol{\infty}} \quad \text{und} \quad \frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$$

nennen wir auch **unbestimmte Ausdrücke**.

Behauptest du ein Ergebnis für $0 \cdot \infty$ zu kennen, dann zeige ich dir ein Gegenbeispiel.

$1 = 0$?

Wo ist der Fehler passiert?

$$1 = \lim_{n\to\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \cdot n\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} n\right) = 0 \cdot \lim_{n\to\infty} n = 0.$$

$0 = 1/2$?

Diesmal ist der Fehler besser versteckt. Kannst du ihn finden?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}\right) + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n^2}\right) + \ldots + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2}\right) = 0 + 0 + \ldots + 0 = 0,$$

wohingegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1)}{2 \cdot n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2 \cdot n} = \frac{1}{2},$$

weil ja

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

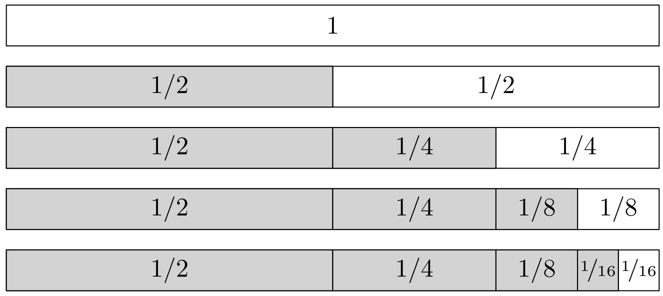
3. Summe unendlich vieler Zahlen

Was kommt heraus, wenn man unendlich viele positive Zahlen addiert? Es kommt drauf an ...

Ein Meter bleibt ein Meter.

Wir nehmen einen Papierstreifen mit 1 Meter Länge und teilen ihn in der Mitte. Dann nehmen wir eine Hälfte und teilen sie wieder in der Mitte. Und so machen wir immer weiter:

$$\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = 1$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{8} = 1$$
$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) + \frac{1}{16} = 1$$



Wir können weitermachen, so lange uns danach ist. Irgendwann wird uns nur die Fingerfertigkeit fehlen.
Die Gesamtlänge dieser potenziell unendlich vielen Papierschnitzel ist aber niemals größer als die ursprüngliche Länge von 1 Meter. Unsere Intuition sagt uns hier also

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \cdots = 1.$$

Als Nächstes wollen wir diese Intuition von Summen unendlich vieler Zahlen auf feste Beine stellen:

Summe unendlich vieler Zahlen

Die Folge $\langle a_n \rangle$ hat unendlich viele Folgenglieder. Was ist mit $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$ gemeint?
Erinnere dich, dass wir zu jeder Folge $\langle a_n \rangle$ auch die zugehörige Folge $\langle s_n \rangle$ bilden können.
Dabei ist s_n die n-te Teilsumme der ursprünglichen Folge, also

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n.$$

Wenn die Folge $\langle s_n \rangle = \langle a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots \rangle$ einen Grenzwert hat, dann schreiben wir

$$\lim_{n \to \infty} s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

Eine notwendige Bedingung

Wenn $\langle a_n \rangle$ keine Nullfolge ist, dann kann die zugehörige Folge $\langle s_n \rangle$ der Teilsummen keinen Grenzwert haben.
Oder anders herum: Wenn die Folge $\langle s_n \rangle$ gegen eine Zahl konvergiert, dann muss die ursprüngliche Folge $\langle a_n \rangle$ eine Nullfolge sein. Kannst du die folgende Erklärung dafür nachvollziehen?
Es gilt $a_5 = s_5 - s_4$ bzw. allgemein $a_n = s_n - s_{n-1}$. Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ ist, dann ist

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

a_n ist also eine Nullfolge.

Links, rechts, links, rechts, ...

Hinter der Summe

$$-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

stecken die Folge $\langle a_n \rangle = \langle (-1)^n \rangle$ und deren Teilsummenfolge $\langle s_n \rangle = \langle -1, 0, -1, 0, ... \rangle$.

Versuche auf zwei verschiedene Arten zu erklären, warum diese Summe keinen Grenzwert hat.

Bequem zum Ziel

Die Folge $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ hat die zugehörige Teilsummenfolge $\langle s_n \rangle$ mit

$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\ .$$

Berechne s_{10} und s_{20} mit dem Taschenrechner. Meinst du, dass die Folge $\langle s_n \rangle$ beschränkt ist?
Eine Abschätzung, wie groß die Summe dieser unendlich vielen Zahlen mindestens sein muss:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4}}_{\geq 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{5}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{\geq \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{\geq \frac{1}{8}} + \frac{1}{8}}_{\geq 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{9}}_{\geq \frac{1}{16}} + \underbrace{\frac{1}{10}}_{\geq \frac{1}{16}} + \cdots + \frac{1}{16}}_{\geq 8\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \cdots$$

Was meinst du jetzt?

Wenn $\langle a_n \rangle$ eine Nullfolge ist, bedeutet das noch lange *nicht*, dass die zugehörige Teilsummenfolge $\langle s_n \rangle$ konvergiert.

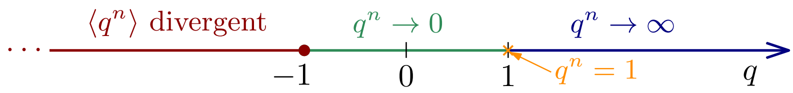
So wie die Folge $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ hilft uns auch häufig die geometrische Folge $\langle q^n \rangle$ als *Baustein* für die Bestimmung von Grenzwerten. Ob die Reise mit $\langle q^n \rangle$ überhaupt ein Ziel hat und – falls ja – wo dieses liegt, hängt ganz vom Wert q ab.

Grenzwert geometrischer Folgen

Für welche der folgenden Werte q hat die Folge $\langle q^n \rangle$ einen Grenzwert?

i) $q = 2$ **ii)** $q = 1$ **iii)** $q = 0{,}5$ **iv)** $q = -0{,}5$ **v)** $q = -1$ **vi)** $q = -2$

Die folgende Zeichnung fasst alle möglichen Ausgänge zusammen. Erkläre sie in eigenen Worten:



Prozentrechnung

Du eröffnest ein Sparbuch mit 400 € Guthaben. Immer zu Jahresende multipliziert die Bank dein Guthaben mit dem Faktor $q = 1{,}02$. Was bedeutet das für dein Guthaben?
Was passiert mit deinem Guthaben, wenn du nur sehr geduldig bist?
Was passiert mit deinem Guthaben, wenn $q = 1$ ist? Was bei $0 < q < 1$?

Wenn $q > 1$ ist, können wir ein $h > 0$ finden mit $q = 1 + h$. Dann ist

$$q^n = (1 + h)^n \geq 1 + n \cdot h.$$

Bei der Ungleichung helfen der Binomische Lehrsatz und das Pascalsche Dreieck.

Erkläre, warum für $q > 1$ also $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \infty$ gilt.

Wenn andererseits $-1 < q < 1$ ist, dann ist $p = \frac{1}{|q|} > 1$. Erkläre, weshalb dann $q^n \to 0$ gilt.

Geometrische Reihe

Was ist jetzt also $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots$, wenn $\langle b_n \rangle$ eine geometrische Folge ist?
Erinnere dich, dass wir mit der expliziten Darstellung $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$ die Summe der ersten n Folgenglieder berechnen können:

$$s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \qquad q \neq 1.$$

Wenn q im Intervall $]-1; 1[$ liegt, dann beträgt die Summe aller Folgenglieder

$$\boldsymbol{b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \frac{b_1}{1 - q}}.$$

Kannst du die folgende Erklärung dafür nachvollziehen?

Wenn q im Intervall $]-1; 1[$ liegt, dann konvergiert $\langle s_n \rangle$: $\quad s_n = b_1 \cdot \dfrac{\overbrace{q^n}^{\to 0} - 1}{q - 1}$.

Also ist $b_1 + b_2 + b_3 + \cdots = \lim\limits_{n \to \infty} s_n = b_1 \cdot \dfrac{0 - 1}{q - 1} = b_1 \cdot \dfrac{1}{-q + 1} = \dfrac{b_1}{1 - q}$.

Beispiel 3.1. Die Summe der unendlich vielen Zahlen Ein Meter bleibt ein Meter.

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots$$

ist der Grenzwert der geometrischen Reihe mit $b_1=\frac{1}{2}$ und $q=\frac{1}{2}$. Es gilt also

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

Beispiel 3.2. Berechne die Summe aller Folgenglieder der geometrischen Folge mit $b_1=42$ und $q=-0{,}2$. Um wie viel Prozent ist das erste Folgenglied größer als die Summe aller Folgenglieder?

Lösung.

$$s=b_1+b_2+b_3+\cdots=\frac{42}{1-(-0{,}2)}=\frac{42}{1{,}2}=35.$$

Es ist $\frac{b_1}{s}=\frac{42}{35}=1{,}2=120\%$, also ist b_1 um 20% größer als s. Das ist kein Zufall, weil $s\cdot(1-q)=b_1$ ist. □

Periodische Zahlen sind rational.

Es geht uns hier um die Zahl mit periodischer Dezimalentwicklung $4{,}3\overline{12}=4{,}31212121212\ldots$
Kennst du schon den folgenden Kniff, um die periodische Zahl in einen Bruch umzuwandeln?

$$\begin{aligned}x&=4{,}3121212\ldots\\10\cdot x&=43{,}121212\ldots&&\text{Komma um 1 Stelle nach rechts verschieben.}\\1000\cdot x&=4312{,}121212\ldots&&\text{Komma um 3 Stellen nach rechts verschieben.}\\(1000-10)\cdot x&=4312-43=4269\\x&=\frac{4269}{990}=\frac{1423}{330}.\end{aligned}$$

Hier ist noch eine weitere Möglichkeit, dasselbe Problem anzugehen:

$$0{,}0\overline{12}=12\cdot10^{-3}+12\cdot10^{-5}+12\cdot10^{-7}+\cdots=\frac{12\cdot10^{-3}}{1-10^{-2}}=\frac{12}{10^3-10^1}=\frac{12}{990}.$$

Also ist

$$x=4{,}3+0{,}0\overline{12}=\frac{43}{10}+\frac{12}{990}=\frac{43\cdot99+12}{990}=\frac{4269}{990}=\frac{1423}{330}.$$

Achilles und die Schildkröte

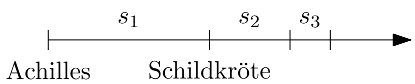
Das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte geht auf den griechischen Philosophen Zenon von Elea (5. Jh. v. Chr.) zurück. Es lautet sinngemäß folgendermaßen:

> *Achilles und die Schildkröte starten ein Wettrennen. Da Achilles schneller ist, lässt er der Schildkröte einen Vorsprung. Sie starten gleichzeitig und bewegen sich jeweils mit konstanter Geschwindigkeit fort. In der Zeit, bis Achilles die Startposition der Schildkröte erreicht, hat diese schon wieder einen Vorsprung herausgeholt. Bis Achilles diesen neuen Vorsprung einholt, hat die Schildkröte wiederum einen neuen (kleineren) Vorsprung. Diesen muss Achilles wieder einholen und so weiter. Achilles kommt der Schildkröte also immer näher, wird sie aber niemals überholen.*

Aus der Praxis wissen wir doch, dass Achilles die Schildkröte überholen wird.
Kannst du den Trugschluss entdecken?

Beispiel 3.3. Achilles läuft mit der Geschwindigkeit $v_A = 5\,\text{m/s}$, und die Schildkröte bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v_S = 0{,}2\,\text{m/s}$ fort. Der Vorsprung zu Beginn beträgt $100\,\text{m}$.
Wie lang dauert es, bis Achilles die Schildkröte einholt?

Lösung. Wir bezeichnen den ersten Vorsprung mit $s_1 = 100\,\text{m}$, den zweiten Vorsprung mit s_2, und so weiter:



Achilles braucht für s_1 gleich lang wie die Schildkröte für s_2, also ist $v = \frac{s}{t} \iff s = v \cdot t \iff t = \frac{s}{v}$.

$$\frac{s_1}{v_A} = \frac{s_2}{v_S} \quad \iff \quad s_2 = v_S \cdot \frac{s_1}{v_A} \quad \iff \quad s_2 = s_1 \cdot \frac{v_S}{v_A} = s_1 \cdot 0{,}04.$$

Erkläre, warum $\langle s_n \rangle$ eine geometrische Folge mit $q = 0{,}04$ ist.
Welche Bedingung müssen allgemein v_S und v_A erfüllen, damit $q < 1$ ist?

Die unendlich vielen Vorsprünge haben also tatsächlich nur eine endliche Gesamtlänge:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots = \frac{s_1}{1-q} = 104{,}166\ldots\,\text{m}.$$

Achilles benötigt für diese Strecke

$$t_A = \frac{104{,}166\ldots\,\text{m}}{5\,\text{m/s}} = 20{,}833\ldots\,\text{s}.$$

Wir rechnen zur Probe nach, wie lang die Schildkröte unterwegs ist, bis sie überholt wird:

$$t_S = \frac{4{,}166\ldots\,\text{m}}{0{,}2\,\text{m/s}} = 20{,}833\ldots\,\text{s}. \checkmark$$

Die Gesamtlänge von unendlich vielen kurzen Strecken kann endlich sein. ☺ □