Bruchgleichungen

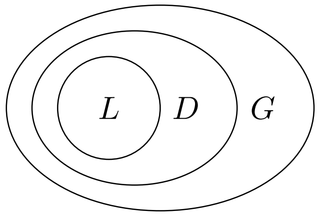
Bei einer **Bruchgleichung** tritt die gesuchte Variable im Nenner eines Bruchs auf.

Zum Beispiel: $\frac{4}{x+2} = -2$

Wir unterscheiden zwischen der **Grundmenge**, der **Definitionsmenge** und der **Lösungsmenge**:

Die **Grundmenge** $\boldsymbol{G}$ enthält alle Zahlen, die für die Variable x vorgesehen sind. Die Grundmenge ist Teil der Angabe. Zum Beispiel: $G = \mathbb{R}$.

Die **Definitionsmenge** $\boldsymbol{D}$ enthält alle Zahlen der Grundmenge, für die alle Terme der Gleichung definiert sind.
Wir müssen zum Beispiel eine Division durch 0 vermeiden.



Die **Lösungsmenge** $\boldsymbol{L}$ enthält alle Zahlen der Definitionsmenge, die Lösungen der Gleichung sind.

Eine Zahl heißt Lösung der Gleichung, wenn man beim Einsetzen dieser Zahl für x auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis erhält.

Bruchgleichungen lösen

Löse die Bruchgleichung $\frac{4}{x+2} = -2$ über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$.

1) Wir ermitteln die Definitionsmenge:
Wenn $x + 2 = 0$, also $x = -2$ gilt, dann ist $\frac{4}{x+2}$ *nicht* definiert. Division durch 0
Die Zahl -2 kann damit keine Lösung der Gleichung sein.
Die Definitionsmenge D enthält also alle reellen Zahlen außer -2. Kurz geschrieben: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

2) Wir ermitteln die Lösungsmenge L, indem wir die Bruchgleichung nach x umformen:

$$\begin{aligned} \frac{4}{x+2} &= -2 && \mid \cdot (x+2) && x \neq -2 \\ 4 &= -2 \cdot (x+2) \\ 4 &= -2 \cdot x - 4 && \mid +4 \\ 8 &= -2 \cdot x && \mid : (-2) \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Die Bruchgleichung hat also eine Lösung, nämlich -4. Kurz geschrieben: $L = \{-4\}$

Wozu die Definitionsmenge ermitteln?

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $\frac{x}{x^2} = 1$? Lukas rechnet ohne viel nachzudenken:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^2} &= 1 && \mid \cdot x^2 \\ x &= x^2 && \mid -x^2 \\ x - x^2 &= 0 \\ x \cdot (1-x) &= 0 \end{aligned}$$

Die Gleichung $x \cdot (1-x) = 0$ hat 2 Lösungen, nämlich $x_1 =$ ______ und $x_2 =$ ______ .

Die ursprüngliche Gleichung hat aber nur eine Lösung, nämlich $x =$ ______ . Haben wir uns verrechnet?

Nein: Die Multiplikation mit x^2 ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $x \neq 0$ ist. Dabei ist also die Lösung $x = 0$ dazu gekommen.

Deshalb ermitteln wir zuerst die Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Strategie für Bruchgleichungen

Die Gleichung $\frac{a}{b} = c \cdot \left(\frac{x}{x+2} - 5\right)$ soll nach x umgeformt werden.

Die folgenden Schritte helfen beim Umformen von Bruchgleichungen, bei denen die gesuchte Variable an mehreren Stellen auftritt.

1) Wir multiplizieren die Klammern aus:

$$\frac{a}{b} = \frac{c \cdot x}{x+2} - 5 \cdot c$$

2) Wir multiplizieren die Gleichung mit dem Hauptnenner: „Kleinster" gemeinsamer Nenner.

$$a \cdot (x+2) = b \cdot c \cdot x - 5 \cdot b \cdot c \cdot (x+2)$$

3) Wir multiplizieren die Klammern aus: Dann sehen wir auf einen Blick, welche Art von Gleichung vorliegt.

$$a \cdot x + 2 \cdot a = b \cdot c \cdot x - 5 \cdot b \cdot c \cdot x - 10 \cdot b \cdot c$$
$$a \cdot x + 2 \cdot a = -4 \cdot b \cdot c \cdot x - 10 \cdot b \cdot c$$

4) Die erhaltene Gleichung ist linear. Nur mit Additionen und Subtraktionen bringen wir also alle Terme mit x auf eine Seite und alle Terme ohne x auf die andere Seite:

$$a \cdot x + 4 \cdot b \cdot c \cdot x = -10 \cdot b \cdot c - 2 \cdot a$$

5) Wir heben x heraus:

$$x \cdot (a + 4 \cdot b \cdot c) = -10 \cdot b \cdot c - 2 \cdot a$$

6) Wir dividieren durch den Klammerausdruck:

$$x = \frac{-10 \cdot b \cdot c - 2 \cdot a}{a + 4 \cdot b \cdot c}$$

Wenn wir die Terme mit x auf die rechte Seite gebracht hätten, wären wir bei $x = \frac{10 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a}{-a - 4 \cdot b \cdot c}$ gelandet. Das ist aber das gleiche Ergebnis, denn wir können den Bruch mit (-1) erweitern.

Bruchgleichungen lösen

① Löse die Bruchgleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$. Gib die Definitionsmenge D an.

a) $\frac{2 \cdot x}{x - 28} = 6$ **b)** $\frac{14}{3 \cdot x - 8} + \frac{12}{4 - 2 \cdot x} = 0$ **c)** $\frac{3}{x} - \frac{2 \cdot x}{x - 1} = -2$ **d)** $\frac{x}{x-2} + 2 = 3 \cdot \frac{x}{x+2}$

Formeln umformen

② Forme nach x um, und gib das Ergebnis ohne Doppelbruch an.

a) $-2 \cdot x + a \cdot b = c - 3 \cdot a \cdot x$

b) $a \cdot (b \cdot x - 5) = x \cdot (a - 2)$

c) $\frac{a}{3 \cdot x - 1} = \frac{b}{2 - 4 \cdot x}$

d) $\frac{a}{x-2} = \frac{b}{x-3} + \frac{c}{x-2}$

e) $3 \cdot x \cdot z + \frac{1}{2 \cdot b} = \frac{a \cdot x}{b}$

f) $\frac{a - 2 \cdot x}{6 \cdot x} + 2 = \frac{3 \cdot x - a}{2 \cdot x}$

① **a)** $D = \mathbb{R} \setminus \{28\}$, $L = \{42\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{8}{3}, 2\}$, $L = \{5\}$ **c)** $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $L = \{3\}$ **d)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $L = \{1\}$

② **a)** $x = \frac{a \cdot b - c}{2 - 3 \cdot a}$ **b)** $x = \frac{5 \cdot a}{a \cdot b - a + 2}$ **c)** $x = \frac{2 \cdot a + b}{4 \cdot a + 3 \cdot b}$ **d)** $x = \frac{3 \cdot a - 2 \cdot b - 3 \cdot c}{a - b - c}$ **e)** $x = \frac{1}{2 \cdot a - 6 \cdot b \cdot z}$ **f)** $x = -4 \cdot a$