Scheitelpunktform

Einen Term der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ kannst du immer mit den gleichen Schritten in die **Scheitelpunktform** $\boldsymbol{a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ umwandeln.
Zum Beispiel: $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5$

1) Beim Term $a \cdot x^2 + b \cdot x$ den Koeffizienten a herausheben:

$$3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5 = 3 \cdot \left[x^2 - \frac{2}{3} \cdot x\right] + 5$$

2) Den Term $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$ in der Klammer quadratisch ergänzen:

$$3 \cdot \left[x^2 - \frac{2}{3} \cdot x\right] + 5 = 3 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 5$$

3) Die äußere Klammer ausmultiplizieren und vereinfachen:

$$3 \cdot \left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] + 5 = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 5 = 3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$$

Die Scheitelpunktform von $3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5$ ist also $3 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}$.

Die quadratische Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 5$ hat also den Scheitelpunkt $S = \left(\frac{1}{3} \mid \frac{14}{3}\right)$.

Scheitelpunktform

① Forme die Terme in Scheitelpunktform um.

a) $2 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 1$ **b)** $x^2 + 5 \cdot x - 2$ **c)** $-3 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 4$ **d)** $\frac{2}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x - 3$

Quadratische Gleichungen mit Scheitelpunktform lösen

Eine **quadratische Gleichung** der Form $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ kannst du mit der Scheitelpuntkform immer mit den gleichen Schritten lösen.
Zum Beispiel: $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0$

1) Die Gleichung durch den führenden Koeffizienten a dividieren: **„Normierung“**

$$2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot x - 8 = 0$$

2) Den Term $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$ quadratisch ergänzen und auf einer Seite isolieren:

$$x^2 + 2 \cdot x - 8 = 0 \iff (x+1)^2 - 1^2 - 8 = 0 \iff (x+1)^2 = 9$$

3) Wurzelziehen und die Gleichung nach x auflösen:

$$(x+1)^2 = 9 \iff x + 1 = \pm\sqrt{9} \iff x = -1 \pm 3$$

Die quadratische Gleichung $2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16 = 0$ hat also die Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$.

Quadratische Gleichungen mit Scheitelpunktform lösen

② Löse die quadratischen Gleichungen mit der Scheitelpunktform.

a) $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$ **b)** $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 60 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{7}{16} = 0$ **d)** $3 \cdot x^2 - 10 \cdot x + \frac{16}{3} = 0$

Kleine Lösungsformel

Die Lösungen jeder quadratischen Gleichung der Form $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ kannst du mit der **kleinen Lösungsformel** berechnen:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Diese Formel kannst du wie zuvor mit der Scheitelpunktform herleiten. Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen.

Zum Beispiel: $8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 = 0$

1) Die Gleichung durch den führenden Koeffizienten a dividieren:

$$8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 = 0 \iff x^2 - \frac{10}{8} \cdot x - \frac{3}{8} = 0$$

2) Die Koeffizienten p und q ablesen und in die kleine Lösungsformel einsetzen:

$$x^2 \underbrace{-\frac{5}{4}}_{p=-\frac{5}{4}} \cdot x \underbrace{-\frac{3}{8}}_{q=-\frac{3}{8}} = 0 \iff x_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{3}{8}} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} + \frac{24}{64}} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64}} = \frac{5}{8} \pm \frac{7}{8}$$

Die quadratische Gleichung $8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Kleine Lösungsformel

(3) Löse die quadratischen Gleichungen mit der kleinen Lösungsformel.

a) $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$ **b)** $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 60 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{7}{16} = 0$ **d)** $3 \cdot x^2 - 10 \cdot x + \frac{16}{3} = 0$

Große Lösungsformel

Die Lösungen jeder quadratischen Gleichung der Form $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ kannst du mit der **großen Lösungsformel** berechnen:

$$\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$$

Diese Formel kannst du herleiten, indem du die Gleichung durch a dividierst und in die kleine Lösungsformel einsetzt.

Zum Beispiel: $8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 = 0$

1) Die Koeffizienten a, b und c ablesen und in die große Lösungsformel einsetzen:

$$\underbrace{8}_{a=8} \cdot x^2 \underbrace{-10}_{b=-10} \cdot x \underbrace{-3}_{c=-3} = 0 \iff x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 96}}{16} = \frac{10 \pm 14}{16}$$

Die quadratische Gleichung $8 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 3 = 0$ hat die Lösungen $x_1 = -\frac{4}{16} = -\frac{1}{4}$ und $x_2 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$.

Große Lösungsformel

(4) Löse die quadratischen Gleichungen mit der großen Lösungsformel.

a) $x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0$ **b)** $4 \cdot x^2 + 8 \cdot x - 60 = 0$ **c)** $x^2 - \frac{3}{2} \cdot x - \frac{7}{16} = 0$ **d)** $3 \cdot x^2 - 10 \cdot x + \frac{16}{3} = 0$

(1) **a)** $2 \cdot (x - 2)^2 - 7$ **b)** $(x + \frac{5}{2})^2 - \frac{33}{4}$ **c)** $-3 \cdot (x - \frac{7}{6})^2 + \frac{97}{12}$ **d)** $\frac{3}{2} \cdot (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{73}{24}$

(2) (3) (4) **a)** $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ **b)** $x_1 = -5$, $x_2 = 3$ **c)** $x_1 = -\frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{7}{4}$ **d)** $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{8}{3}$