Äquivalenzumformungen

Äquivalenzumformungen ändern *nicht* die Lösungen einer Gleichung.

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

haben die gleiche Lösung ______ .

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 4 \quad \text{und} \quad x^2 = 1$$

haben die gleichen Lösungen ______ und ______ .

Multiplikation mit der gleichen Zahl $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$\frac{x}{5} = -2 \quad \text{und} \quad x = 5 \cdot (-2)$$

haben die gleiche Lösung ______ .

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel: Die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

haben die gleiche Lösung ______ .

Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung

Beide Seiten einer Gleichung quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung.
Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben. Zum Beispiel:

Die Gleichung $x = -3$ hat eine Lösung, nämlich ______ .

Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich ______ und ______ .

Wir dürfen Gleichungen quadrieren. Die quadrierte Gleichung liefert aber nur *Lösungskandidaten* für die ursprüngliche Gleichung.

Wurzelgleichungen lösen

Wurzelgleichungen, bei denen die gesuchte Variable nur unter einer Wurzel vorkommt, kannst du immer mit den gleichen Schritten lösen.
Zum Beispiel: $2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42$

1) Den Wurzelausdruck mit Äquivalenzumformungen auf einer Seite isolieren:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42 \iff 2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 10 \iff \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5$$

2) Beide Seiten quadrieren und die Gleichung lösen:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5 \implies 3 - 2 \cdot x = 25 \iff 3 - 25 = 2 \cdot x \iff x = -11$$

Das Symbol $\implies$ meint: „Jede Lösung der linken Gleichung ist auch eine Lösung der rechten Gleichung.“
Das Symbol $\iff$ meint zusätzlich: „Auch jede Lösung der rechten Gleichung ist eine Lösung der linken Gleichung.“

3) Lösungskandidaten in die ursprüngliche Gleichung einsetzen:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot (-11)} + 32 \stackrel{?}{=} 42 \iff 2 \cdot \sqrt{25} + 32 \stackrel{?}{=} 42 \checkmark$$

Dabei tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

- Die Probe ergibt auf beiden Seiten das gleiche Ergebnis. Dann ist der Lösungskandidat auch eine Lösung der Wurzelgleichung. In diesem Beispiel ist -11 also eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.
- Die Probe ergibt auf den Seiten verschiedene Ergebnisse oder es kommt ein nicht definierter Wurzelausdruck vor (z.B.: $\sqrt{-4}$). Dann ist der Lösungskandidat keine Lösung. „Scheinlösung“

Wurzelgleichungen lösen

1 Löse die gegebene Wurzelgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $7 \cdot \sqrt{42 - x} = 42$ **b)** $\dfrac{-2 \cdot \sqrt{6 + 2 \cdot x}}{3} = 4$ **c)** $\sqrt{x^2 - 6 \cdot x + 24} + 2 \cdot x = 12$

Wurzelgleichungen lösen

Wenn die gesuchte Variable unter mehreren Wurzeln vorkommt, versuchen wir die Anzahl dieser Wurzeln schrittweise zu reduzieren. Dazu kann mehrfaches Quadrieren notwendig sein.
Zum Beispiel: $\sqrt{x+4} - 2 \cdot \sqrt{6-x} - \sqrt{21 - 4 \cdot x} = 0$

1) Einen Wurzelausdruck auf einer Seite isolieren und quadrieren:

Beachte, dass $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$, $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ und $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$.

$$\begin{aligned} &\iff \sqrt{x+4} - 2 \cdot \sqrt{6-x} = \sqrt{21 - 4 \cdot x} \\ &\implies (x+4) - 4 \cdot \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-x} + 4 \cdot (6-x) = 21 - 4 \cdot x \end{aligned}$$

2) Die Gleichung vereinfachen und den Wurzelausdruck auf einer Seite isolieren:

$$\begin{aligned} &\iff (x+4) - 4 \cdot \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-x} + 4 \cdot (6-x) = 21 - 4 \cdot x \\ &\iff x + 7 = 4 \cdot \sqrt{x+4} \cdot \sqrt{6-x} \end{aligned}$$

3) Beide Seiten quadrieren und die Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} &\implies (x+7)^2 = 16 \cdot (x+4) \cdot (6-x) \\ &\iff x^2 + 14 \cdot x + 49 = 16 \cdot (-x^2 + 2 \cdot x + 24) \\ &\iff 17 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 335 = 0 \\ &\iff x_{1,2} = \frac{18 \pm 152}{34} \end{aligned}$$

Die beiden Lösungskandidaten sind $x_1 = 5$ und $x_2 = -\frac{67}{17}$.

4) Lösungskandidaten in die ursprüngliche Gleichung einsetzen:

$$\underbrace{\sqrt{5+4}}_{=3} - \underbrace{2 \cdot \sqrt{6-5}}_{=2} - \underbrace{\sqrt{21 - 4 \cdot 5}}_{=1} \stackrel{?}{=} 0 \ \checkmark$$

$$\sqrt{-\frac{67}{17} + 4} - 2 \cdot \sqrt{6 + \frac{67}{17}} - \sqrt{21 + 4 \cdot \frac{67}{17}} \stackrel{?}{=} 0 \iff \frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{26}{\sqrt{17}} - \frac{25}{\sqrt{17}} \stackrel{?}{=} 0 \ ✗$$

Von den beiden Lösungskandidaten ist also nur 5 auch eine Lösung der Wurzelgleichung.
Die Lösungsmenge der Wurzelgleichung ist also $L = \{5\}$.

Wurzelgleichungen lösen

2 Löse die gegebene Wurzelgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $5 \cdot \sqrt{3 \cdot x + 10} = 2 \cdot \sqrt{17 - 4 \cdot x}$ **b)** $\sqrt{5-x} + \sqrt{x} - \sqrt{5+x} = 0$ **c)** $\sqrt{5 + x^2} - 2 = \sqrt{x^2 - 3 \cdot x + 3}$

1 **a)** $L = \{6\}$ **b)** $L = \{\}$ ($x = 15$ ist Scheinlösung.) **c)** $L = \{4\}$ ($x = 10$ ist Scheinlösung.)

2 **a)** $L = \{-2\}$ **b)** $L = \{0, 4\}$ **c)** $L = \{2, \frac{22}{7}\}$