

Kurvenuntersuchung

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 21, 2024

POLYNOMFUNKTIONEN

Aufgabe 1. Untersuche den Graphen der Polynomfunktion $f(x)$. Ermittle:

1. Definitionsmenge
2. Nullstellen (wenn möglich) und ihre Anzahl
3. Monotonieverhalten
4. Tief- und Hochpunkte (ungefähr)

Skizziere den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

c) $f(x) = x^3 - 4x$

f) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

h) $f(x) = -x^3 - 6x^2 + 15x - 5$

j) $f(x) = x^4 - 2x^3$

l) $f(x) = x^4 + 8x + 2$

b) $f(x) = -3x^2 + 3x + 2$

d) $f(x) = x^3 + x - 1$

g) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 5x$

i) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

k) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$

m) $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 8x - 1$

Proposition 1. (*Horizontale Asymptote*)

Die Funktion $f(x)$ hat genau dann eine horizontale Asymptote $y = b$, mit $b \in \mathbb{R}$, für $x \rightarrow +\infty$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Proposition 2. (*Schiefe Asymptote*)

Die Funktion $f(x)$ hat genau dann eine schiefe Asymptote $y = kx + b$, mit $k, b \in \mathbb{R}$, für $x \rightarrow +\infty$, wenn

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

RATIONALE FUNKTIONEN

Aufgabe 2. Untersuche den Graph der rationalen Funktion $f(x)$. Berechne:

1. Definitionsmenge
2. Nullstellen (wenn möglich) und ihre Anzahl
3. Monotonieverhalten
4. Tief- und Hochpunkte (ungefähr)
5. Asymptoten

Skizziere den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2x-3}{4-x}$

c) $f(x) = 3 - \frac{4}{2-3x}$

d) $f(x) = \frac{2x-1}{(x-1)(x+2)}$

e) $f(x) = \frac{x-5}{x^2+2x-15}$

f) $f(x) = \frac{10x-5}{4x^2+3}$

g) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

h) $f(x) = \frac{x^2}{(x-1)(x+3)}$

i) $f(x) = \frac{x(x-5)}{x^2-9}$

j) $f(x) = \frac{x^2-9}{x-2}$

k) $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$

l) $f(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{x}$

Aufgabe 3. (Beta-Verteilung)

Gegeben ist die Funktion $f_{\alpha,\beta}(x) = x^\alpha(1-x)^\beta$, $x \in (0, 1)$. Untersuche verschiedene Formen des Funktionsgraphen abhängig von den Werten der Parameter α und β . Ermittle:

1. Monotonieverhalten.
2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_{\alpha,\beta}(x)$ und $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_{\alpha,\beta}(x)$.
3. Krümmungsverhalten.

EXPONENTEN UND LOGARITHMEN

Aufgabe 4. Untersuche den Graphen der rationalen Funktion $f(x)$. Berechne:

1. Definitionsmenge
2. Nullstellen (wenn möglich) und ihre Anzahl
3. Monotonieverhalten
4. Tief- und Hochpunkte (ungefähr)
5. Krümmungsverhalten und Wendepunkte
6. Asymptoten

Skizziere den Funktionsgraphen.

a) $f(x) = e^{-x^2}$

c) $f(x) = e^x - 2x + 1$

e) $f(x) = (x + 1)e^x$

g) $f(x) = (x^2 - 1)e^x$

i) $f(x) = \frac{2x}{e^x}$

k) $f(x) = xe^{-x^2}$

b) $f(x) = \ln^2(x)$

d) $f(x) = \ln(x) - 3x + 4$

f) $f(x) = x \ln(x)$

h) $f(x) = x^3 \ln(x)$

j) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

l) $f(x) = \sqrt{x} \ln(x)$

Aufgabe 5. (Gamma-Verteilung)

Gegeben ist die Funktion $f_\alpha(x) = x^{\alpha-1}e^{-x}$, $x > 0$. Untersuche verschiedene Formen des Funktionsgraphen abhängig von den Werten des Parameters α . Ermittle:

1. Monotonieverhalten.

2. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x)$.

3. Krümmungsverhalten.