# Modellierung Exponentialler Prozesse

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 25, 2024

**Aufgabe 1.** Die Gerüchteküche brodelt. Die Anzahl an Personen, die das Gerücht nach $t$ Stunden kennen, wird näherungsweise durch die folgende Exponentialfunktion $P$ beschrieben:

$$P(t) = 2 \cdot 4^{3 \cdot t},$$

$t-$ Zeit in Stunden ($t \geq 0$)

$P(t)-$ Anzahl Personen, die das Gerücht zum Zeitpunkt $t$ kennen

1. Wie viele Personen kennen zu Beginn ($t = 0$) das Gerücht?
2. Wie viele Personen kennen das Gerücht nach 30 Minuten?
3. Wie lang dauert es bis sich die Anzahl der Personen, die das Gerücht kennt, vervierfacht?

**Quelle:** Projekt MmF "Exponential- und Logarithmusfunktionen".

**Aufgabe 2.** Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion $N$ beschrieben werden:

$$N(t) = 20 \cdot 1.02337^t,$$

$t \ldots$ Zeit in min

$N(t) \ldots$ Bakterienmasse zur Zeit $t$ in Mikrogramm (µg)

1. Geben Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute an.
2. Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 10 S.
3. Wie lang dauert es bis sich die Masse der Bakterien um 150 % steigt?

**Quelle:** Projekt MmF: "Exponential- und Logarithmusfunktionen", Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.

**Aufgabe 3.** Es wird ein Kuchen aus Hefeteig gebacken. Für den Teig benötigt man ein sogenanntes "Dampfl" aus Hefe, warmer Milch und Zucker. Diese Zutaten werden verrührt und in ein 12 cm hohes zylindrisches Gefäß gegeben. Man lässt das Gemisch einige Zeit $t$ in warmer Umgebung ruhen. Die Höhe des Dampfls im Gefäß beträgt zu Beginn 4 cm. Das Dampfl dehnt sich durch die Wärme aus.

Nach der Zeit von 11 Minuten erreicht das Dampfl eine Höhe von 7 cm. Dieses "Aufgehen des Dampfls" kann mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschrieben werden:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$t$ - Zeit nach Beginn des Vorgangs in min

$h(t)$ - Höhe des Dampfls zur Zeit $t$ in cm

1. Ermitteln Sie die Parameter $h_0$ und $\lambda$.
2. Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Höhe pro Minute wächst.
3. Nach wie viele Minuten erreicht das Dampfl eine Höhe von 10cm?

**Quelle:** Projekt MmF: "Exponential- und Logarithmusfunktionen", Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung.

**Aufgabe 4.** In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.

In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

| Beginn des Jahres | 1981 | 2014 |
|---|---|---|
| Bevölkerungsanzahl | 10068 | 4524 |

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion $N$ beschrieben werden.

1. Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion $N$, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit $t$ in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.
2. Ermitteln Sie mithilfe der Funktion $N$, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

**Quelle:** Projekt MmF: "Exponential- und Logarithmusfunktionen"; Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung

**Aufgabe 5.** Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion $h(t)$ beschrieben:

$$h(t) = 0.08e^{0.03 \cdot t}, 0 \leq t < 55$$

$t$ - Zeit in Tagen,

$h(t)$ - Höhe des Strauches zur Zeit $t$ in $m$.

1. Berechne, nach wie vielen Tagen der Strauch eine Höhe von 40 cm aufweist

2. Berechne, nach wie vielen Tagen die Höhe des Strauchs verdoppelt

**Quelle:** Projekt MmF: "Exponential- und Logarithmusfunktionen"; Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung

**Aufgabe 6.** Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

1. Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.
2. Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.
3. Vorhersagen Sie die Bevölkerungszahl im Jahr 2100.

**Quelle:** Projekt MmF "Exponential- und Logarithmusfunktionen"; Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung

**Aufgabe 7.** Der Zerfall von radioaktivem Jod 131 wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}07192 \cdot t}$$

$t$ - Zeit in Tagen,

$N(t)$ - vorhandene Jodmenge nach $t$ Tagen.

1. Erkläre, warum $N_0$ die zu Beginn ($t = 0$) vorhandene Menge ist.
2. Berechne, wie viel Prozent der vorhandenen Menge pro Tag zerfallen.
3. Berechne, wie viel Prozent der vorhandenen Menge pro Woche zerfallen.
4. Lukas behauptet, dass nach 40 Tagen noch mehr als die Hälfte der Ausgangsmenge vorhanden ist. Prüfe, ob seine Aussage stimmt.

**Quelle:** Projekt MmF "Exponential- und Logarithmusfunktionen"; Bundesministerium für Bildung, Wissenschaft und Forschung