Flächeninhalte

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 16, 2024

Aufgabe 1. (Integral als orientierter Flächeninhalt)

Gegeben ist ein bestimmes Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ mit der linearen Funktion $f(x)$ als Integranden.

1. Zeichne den Graph der linearen Funktion $f(x)$.
2. Berechne das bestimmte Integral als orientierten Flächeninhalt. Benutze dabei die Formeln zur Berechnung des Flächeninhaltes von Dreieck und Trapez.

a) $\displaystyle\int_0^2 2x\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,dx$ c) $\displaystyle\int_{-2}^3 (x+2)\,dx$

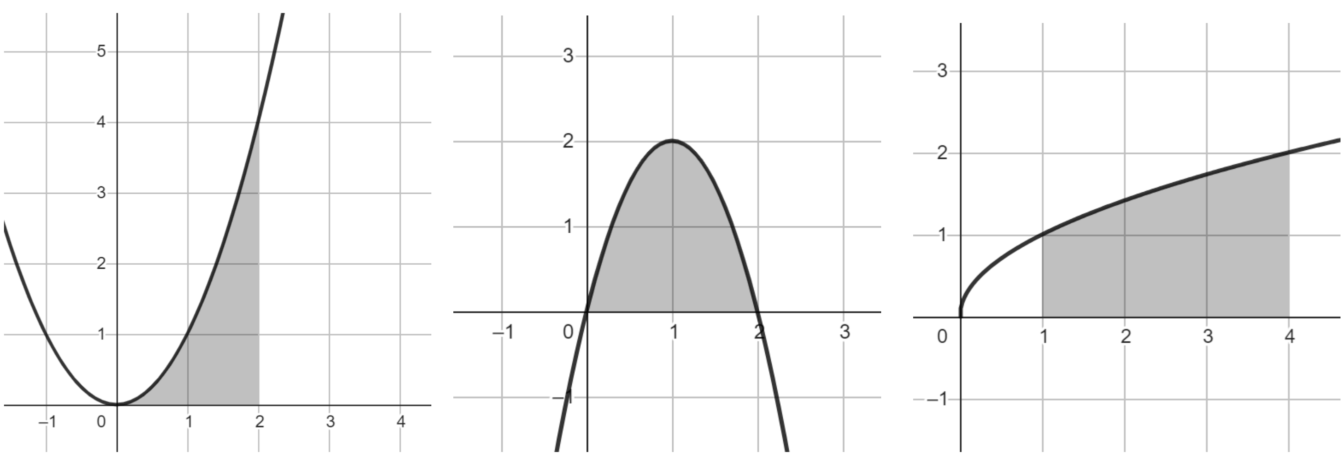
d) $\displaystyle\int_{-4}^1 (x+1)\,dx$ e) $\displaystyle\int_{-4}^0 \left(\frac{x}{2}-1\right)dx$ f) $\displaystyle\int_2^6 (-x+4)\,dx$

Proposition 1. *(Fundamentalsatz der Analysis)*

Gegeben ist die Funktion $f(x)$ und eine zugehörige Stammfunktion $F(x)$, d.h. $F'(x) = f(x)$. Dann gilt

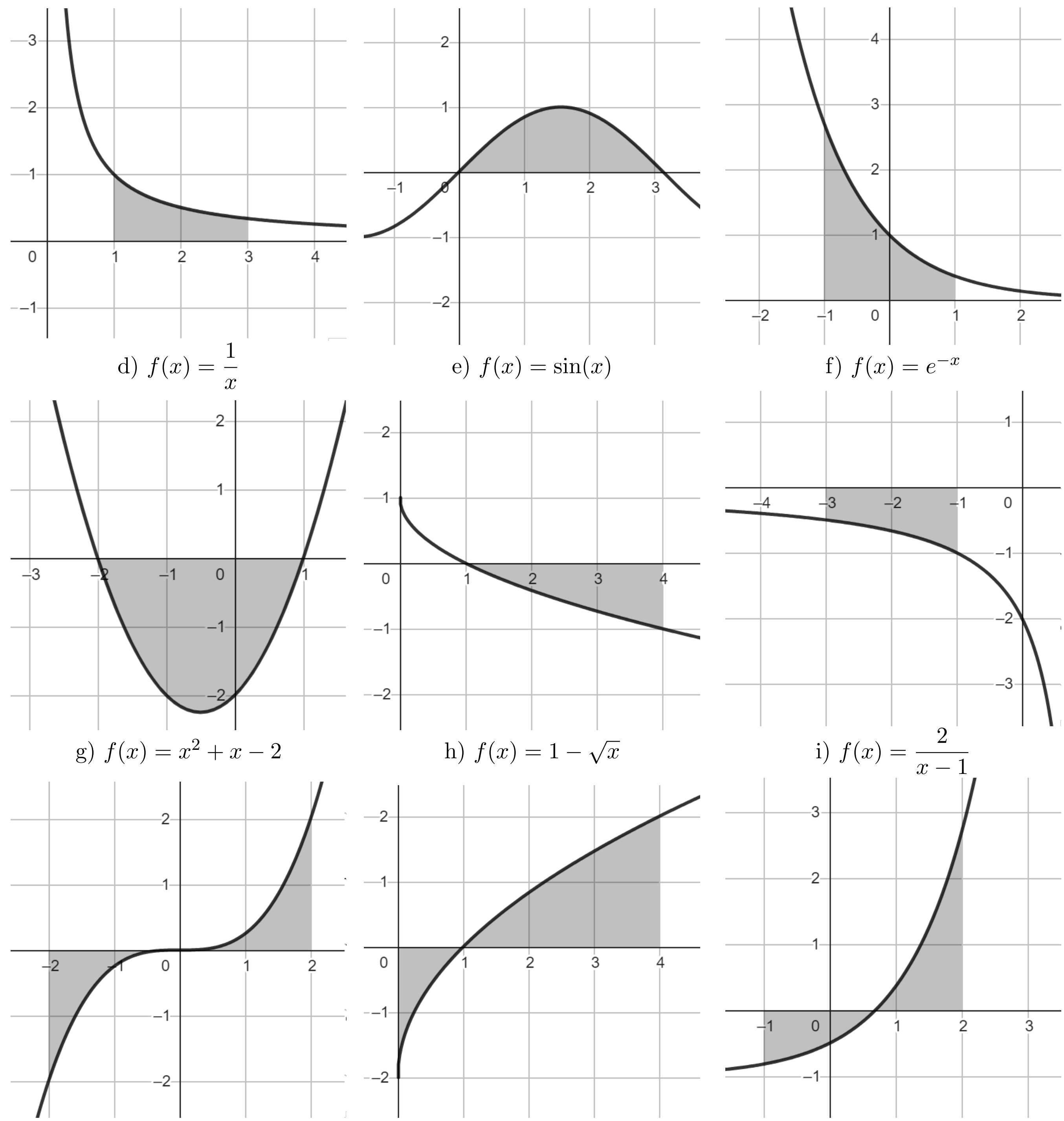
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Aufgabe 2. Gegeben ist der Graph der Funtion $f(x)$. Bestimme die Flächeninhalte der grauen Figuren.



a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = 2x(2-x)$ c) $f(x) = \sqrt{x}$

Figure 1: Aufgabe 2



d) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e) $f(x) = \sin(x)$ f) $f(x) = e^{-x}$

g) $f(x) = x^2 + x - 2$ h) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ i) $f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

j) $f(x) = 0.25x^3$ k) $f(x) = 2\sqrt{x} - 2$ l) $f(x) = 0.5e^x - 1$

Figure 2: Aufgabe 2

Aufgabe 3. Löse die Gleichung und gib ihre geometrische Interpretation an.

a) $\displaystyle\int_0^x e^t\,dt = 1$ b) $\displaystyle\int_{-x}^x t^2\,dt = 18$ c) $\displaystyle\int_x^{x+2} \frac{1}{t}\,dt = 1$ d) $\displaystyle\int_x^0 \sqrt{t+4}\,dt = \frac{14}{3}$

Aufgabe 4. (Uneigentliche Integrale)

Ein uneigentliches Intergral der Form $\int_a^\infty f(x)\,dx$ kann wie folgt berechnet werden:

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

1. Berechne folgende Integrale

   a) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx$

   Untersuche für welche $\alpha > 0$

   $$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx < \infty$$

   gilt.

2. Berechne die Integrale

   a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ c) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

Proposition 2. *(Flächeninhalt zwischen zwei Funktionsgraphen)*

Sei $f(x) \geq g(x)$ auf dem Interval $[a,b]$. Dann kann der Flächeninhalt S des Flächenstücks zwischen den Graphen der Funktionen f und g auf dem Interval $[a,b]$ wie folgt berechnet werden.

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Aufgabe 5. Gegeben sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sowie das Interval $[a,b]$.

1. Bestimme welche Funktion die größere Funktionswerte für alle $x \in [a,b]$ besitzt.
2. Bestimme den Flächeninhalt der Figur, die von den Graphen der Funktionen f und g und von den Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt ist.

a) $f(x) = x$, $g(x) = -\dfrac{x}{2} + 8$, $[1,3]$

b) $f(x) = -x^2 + 4$, $g(x) = 2x$, $[-1,1]$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $g(x) = -x^2 + 6x - 6$, $[2,4]$

d) $f(x) = \dfrac{x}{2} + 2$, $g(x) = \sqrt{x+4}$, $[-4,0]$

Aufgabe 6. Zeichne die Graphen der Funktionen f und g und berechne den Flächeninhalt der Figur, die sie begrenzen.

Hinweis: Berechne zuerst die Schnittpunkte $(x_1 \mid y_1)$ und $(x_2 \mid y_2)$ der Funktionsgraphen und bestimme welche Funktion größere Funktionswerte für alle $x \in [x_1, x_2]$ besitzt.

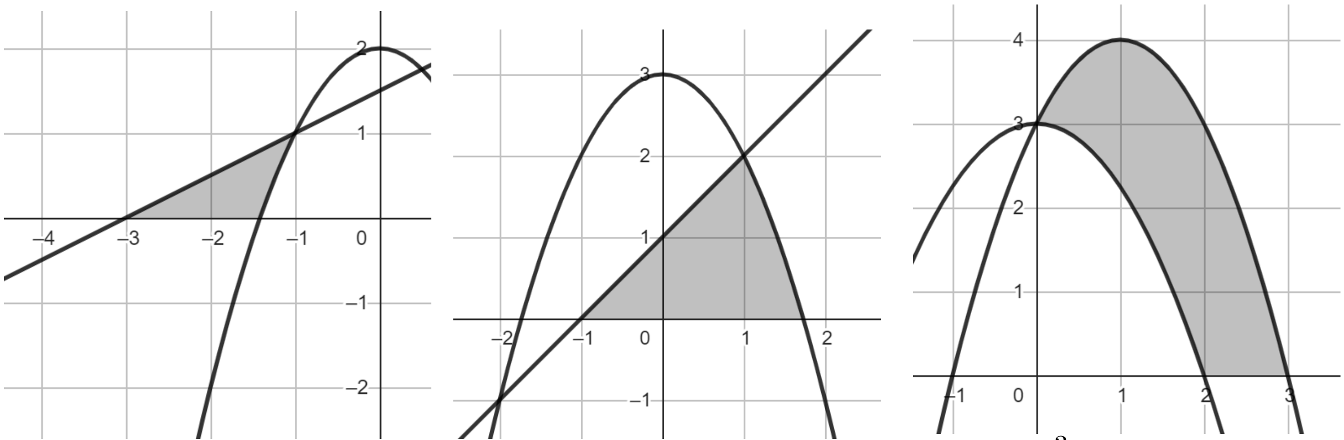
a) $f(x) = 1$ und $g(x) = 2 - x^2$

b) $f(x) = 2x - 5$ und $g(x) = x^2 - 2x - 2$

c) $f(x) = -x^2 + 3$ und $g(x) = 3x^2 + 4x + 3$

d) $f(x) = \dfrac{6}{x}$ und $g(x) = -2x + 8$

Aufgabe 7. Berechne den Flächeninhalt der grauen Figur.



a) $y = 2 - x^2$, $y = 0.5x + 1.5$ b) $y = 3 - x^2$, $y = x + 1$ c) $y = 3 - \frac{3}{4}x^2$, $y = -x^2 + 2x + 3$

Figure 3: Aufgabe 7