

# Rotationsvolumen

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova  
Projekt MmF

January 16, 2024

**Proposition 1.** Gegeben ist eine Funktion  $f(x) > 0$  und das Intervall  $[a, b]$ . Die Figur, die vom Graphen der Funktion  $f$  und der Geraden  $y = 0$ ,  $x = a$ ,  $x = b$  begrenzt wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Das Volumen des Rotationskörpers kann wie folgt berechnet werden,

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

**Aufgabe 1.** Eine Figur, die durch den Graphen der Funktion  $f(x)$ , die  $x$ -Achse und zwei vertikale Linien begrenzt wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Bestimme den Rotationskörper und berechne sein Volumen einerseits durch die Formel aus der Schulgeometrie und andererseits mithilfe der Integralrechnung.

a)  $f(x) = 2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$ .

b)  $f(x) = 0.5x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

c)  $f(x) = 3 - x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

d)  $f(x) = x + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$ .

**Aufgabe 2.** Eine Figur, die durch den Graphen der Funktion  $f(x)$ , die  $x$ -Achse und zwei vertikale Linien begrenzt wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Skizziere den Rotationskörper und berechne sein Volumen.

a)  $f(x) = 1.5x$ ,  $x = 2$ ,  $x = 4$ .

b)  $f(x) = 4 - 2x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$

c)  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ .

d)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x = 0$ ,  $x = 4$ .

e)  $f(x) = e^x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

f)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x = 0.5$ ,  $x = 1$ .

**Aufgabe 3.** Eine Figur, die durch den Graphen der Funktion  $f(x)$ , die  $y$ -Achse und zwei horizontale Linien begrenzt wird, rotiert um die  **$y$ -Achse**. Skizziere den Rotationskörper und berechne sein Volumen.

**Hinweis:** Betrachte für die Funktion  $y = f(x)$  die Umkehrfunktion  $x = g(y)$ .

a)  $f(x) = 2x$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$

b)  $f(x) = 4 - 0.5x$ ,  $y = -1$ ,  $y = 1$

c)  $f(x) = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $y = 1$

d)  $f(x) = 2\sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $y = 2$

e)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$

f)  $f(x) = 3 \ln(x)$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3$ .

**Aufgabe 4.** Eine Figur, die durch zwei Funktionsgraphen und durch horizontale und vertikale Geraden begrenzt wird, rotiert um die  $x$ -Achse. Skizziere den erhaltenen Rotationskörper und ermittle sein Volumen.

- a)  $f(x) = 2, g(x) = x, x = 0.$
- b)  $f(x) = 2x, g(x) = \sqrt{x-1}, x = 2, y = 0.$
- c)  $f(x) = x^2, g(x) = 2 - x, y = 0.$
- d)  $f(x) = \frac{2}{x}, g(x) = x + 1, x = 0, x = 2, y = 0.$

**Aufgabe 5.** Eine Figur, die durch die angegebene Linien begrenzt wird, rotiert um die **y-Achse**. Skizziere den erhaltenen Rotationskörper und ermittle sein Volumen.

- a)  $f(x) = -1.5x + 3, g(x) = x - 2, x = 0.$
- b)  $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = 5 - x, x = 0.$
- c)  $f(x) = x^2 + 2, g(x) = 4x - 2, x = 0.$
- d)  $f(x) = \sqrt{x-1}, g(x) = 0.5x + 1, x = 0, x = 2, y = 0.$

**Aufgabe 6.** (★)

Leite mithilfe der Methoden der Integralrechnung die Formel zur Berechnung des Volumens der folgenden Körper her.

- a) Kugel mit Radius  $R$ .
- b) Drehkegel mit Radius  $R$  und Höhe  $H$ .