Allgemeine Form einer Ebenengleichung (Teil 1)

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

January 9, 2024

EBENENGLEICHUNG

Definition 1. Normalvektor einer Ebene heißt jeder Vektor, der orthogonal zu dieser Ebene steht.

Proposition 1. *Eine Ebene ist durch die Gleichung* $ax + by + cz + d = 0$ *gegeben. Dann ist der Vektor* $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ *ein Normalvektor dieser Ebene.*

Aufgabe 1. Bestimme für die folgenden Ebenen

1. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und ihre Anzahl für jede Koordinatenachse.
2. einen Normalvektor.

a) $3x - 2y + z + 6 = 0$ b) $2x + y - 2z - 8 = 0$
c) $-x + 5y + 3z + 15 = 0$ d) $x - z - 1 = 0$
e) $x + y = 0$ f) $z - 3 = 0$

Proposition 2. *Die Gleichung der Ebene, die den Punkt* $A = (x_0 \mid y_0 \mid z_0)$ *enthält und den Normalvektor* $\vec{n}$ *hat, kann wie folgt berechnet werden*

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Aufgabe 2. Bestimme die Gleichung einer Ebene in allgemeiner Form, die durch den Punkt A geht und die den Normalvektor $\vec{n}$ hat.

a) $A = (1 \mid 3 \mid 2), \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $A = (1 \mid 0 \mid 2), \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $A = (-2 \mid 1 \mid -1), \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ d) $A = (1 \mid -1 \mid 3), \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Bestimme die Gleichung der folgenden Ebenen in allgemeiner Form.

a) Die Ebene, die durch den Punkt $A(0 \mid -3 \mid 0)$ geht und zu der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist.

b) Die Ebene, die durch den Punkt $A(1 \mid 1 \mid 2)$ geht und zu der Geraden $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ orthogonal ist.

c) Die Ebene, die durch den Punkt $A(-2 \mid 0 \mid -3)$ geht und zu der Ebene $x - 3y + 2z = 6$ parallel ist.

d) Die Ebene, die durch den Punkt $A(3 \mid 2 \mid -1)$ geht und zu der yz-Ebene parallel ist.

Definition 2. $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind zwei Vektoren im Raum. Dann ist das **Kreuzprodukt** von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ein Vektor $\vec{u} \times \vec{v}$, sodass

1. $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$ und $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$ gilt.
2. die Länge von $\vec{u} \times \vec{v}$ gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms ist, das $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einschließen.
3. die Vektoren $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden (wie die Koordinatenachsen).

Proposition 3. *Gegeben sind zwei Vektoren* $\vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$. *Dann können die Koordinaten des Kreuzproduktes wie folgt berechnet werden.*

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ -(x_1 z_2 - z_1 x_2) \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. (Drei Punkte und eine Ebene)

Bestimme die Gleichung der folgenden Ebenen in allgemeiner Form .

Hinweis: Bestimme zwei nichtkollineare Vektoren, die in der Ebene liegen, und finde einen Vektor, der zu den beiden Vektoren orthogonal steht. Dieser kann zum Beispiel als Kreuzprodukt zweier Vektoren berechnet werden.

a) Die Ebene, die durch die Punkte $A(3 \mid 0 \mid 0), B(0 \mid 2 \mid 0), C(0 \mid 0 \mid 1)$ geht.

b) Die Ebene, die durch die Punkte $A(-1 \mid 4 \mid 2), B(2 \mid 2 \mid 1), C(0 \mid -3 \mid -2)$ geht.

c) Die Ebene, auf der der Punkt $A = (2 \mid -1 \mid 5)$ und die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ liegen.

d) Die Ebene, auf der der Punkt $A = (0 \mid 3 \mid -5)$ und die Gerade $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ liegen.

e) Die Ebene, die Parametergleichung $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ hat.

f) Die Ebene, die Parametergleichung $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ hat.

Aufgabe 5. (Eine Ebene berührt eine Kugel)

Bestimme die Gleichungen im Normalform der folgenden Ebenen.

Hinweis: Wenn eine Ebene eine Kugel berührt, dann ist die Ebene dem Radius, der den Berührungspunkt enthält, orthogonal.

a) Die Ebene, die die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ im Punkt $A(2 \mid 2 \mid 1)$ berührt.

b) Die Ebene, die die Kugel $(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 4$ im Punkt $A(0 \mid 4 \mid \sqrt{2} - 2)$ berührt.

c) Die Ebene, die durch die Punkte $A(4 \mid 0 \mid 0)$ und $B(0 \mid 2 \mid 0)$ geht und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ berührt.

d) Die Ebene, die durch die Punkte $A(1 \mid 1 \mid 1)$ und $B(2 \mid -3 \mid 5)$ geht und die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ berührt.

BERECHNUNG VON WINKELN

Aufgabe 6. (Winkel zwischen zwei Ebenen)

Bestimme den Winkel zwischen zwei Ebenen.

a) $x - z = 1$ und $x + y + 2z - 4 = 0$.

b) $-x + y - z = 2$ und $2x + 3y - z + 2 = 0$.

c) xy-Koordinatenebene und xz-Koordinatenebene.

d) yz-Koordinatenebene und $x - z = 0$.

e) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ und $x + y + z - 1 = 0$.

f) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ und $-x + 2y + z + 5 = 0$.

Aufgabe 7. (Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen)

Untersuche die Lagebeziehung von zwei Ebenen zueinander (identisch, echt parallel, sich schneidend).

Hinweis: Wenn Normalvektoren zweier Ebenen kollinear sind, dann sind die Ebenen entweder echt parallel oder identisch.

a) $x - z - 2 = 0$ und $-2x + 2z - 7 = 0$.

b) $2x - y + z - 4 = 0$ und $3x + 2y - z - 1 = 0$.

c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ und $3x + 9y + 5z - 14 = 0$.

d) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t, s \in \mathbb{R}$ und $x - y + 4z + 6 = 0$.

Aufgabe 8. (Winkel zwischen Geraden und Ebene)

Bestimme den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene.

Hinweis: Überlege, wie man den gesuchten Winkel berechnen kann, wenn der Winkel, den der Richtungsvektor der Geraden und der Normalvektor der Ebene einschließen, bekannt ist.

a) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $x + 2y + z - 4 = 0$.

b) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $-4x + 6y + 2z - 1 = 0$.

c) $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $x + 2y + 2z = 0$.

d) z-Achse und $x + y = 0$.

e) $\overrightarrow{X} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $z = 2$.