Allgemeine Form einer Geradengleichung in $\mathbb{R}^2$

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 20, 2024

NORMALVEKTOR

Proposition 1. *Sei eine Gerade gegeben durch die Geradengleichung $ax + by + c = 0$. Dann ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Normalvektor dieser Geraden, d.h. der Vektor $\vec{n}$ steht orthogonal zur Geraden.*

Aufgabe 1. Ermittle für die angegebenen Geraden jeweils

1. den Normalvektor.
2. die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

Zeichne die Geraden und zugehörigen Normalvektoren.

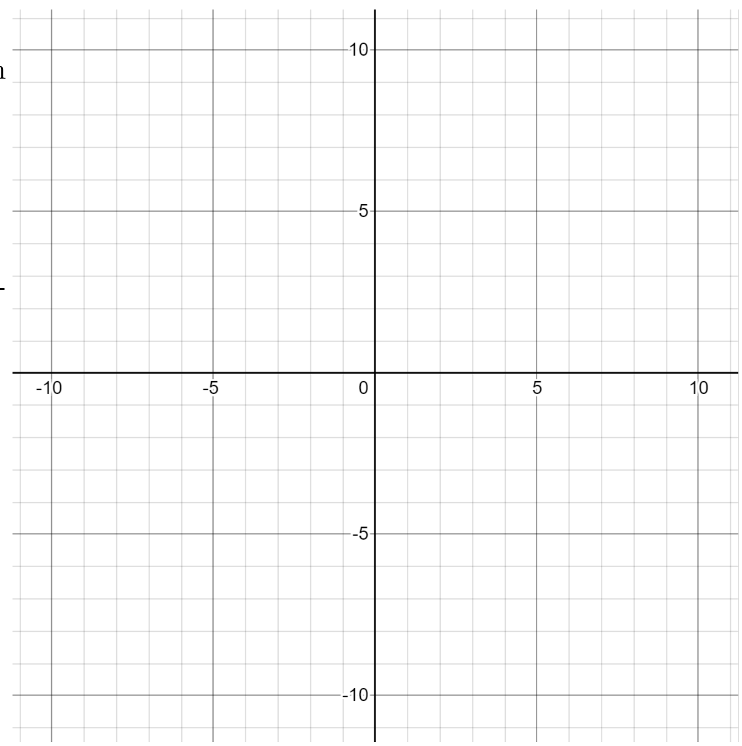
a) $12y = -6$

b) $x + y - 3 = 0$

c) $2x - 3y - 12 = 0$

d) $-x + 6y - 9 = 0$

e) $-4x - 5y + 8 = 0$



Proposition 2. *Die allgemeine Gleichung einer Geraden mit dem Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, die durch den Punkt $A(x_0 \mid y_0)$ verläuft, kann wie folgt berechnet werden.*

$$\vec{n} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

Aufgabe 2. Ermittle die Geradengleichung in allgemeiner Form von jener Geraden, die

a) durch den Punkt $A(3 \mid -1)$ geht und den Normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ hat.

b) durch den Punkt $A(-4 \mid -3)$ geht und orthogonal zur Geraden $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ steht.

c) durch die Punkte $A(3 \mid -5)$ und $B(-1 \mid -1)$ geht.

d) die Parameterdarstellung $g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ hat.

e) durch den Punkt $A(-1 \mid 4)$ geht und orthogonal zur Geraden $2x - 3y + 1 = 0$ steht.

Aufgabe 3. Gegeben ist ein Dreieck ABC.

a) $A(-4 \mid 0)$, $B(0 \mid 6)$, $C(2 \mid 0)$ b) $A(-5 \mid 1)$, $B(-3 \mid 5)$, $C(7 \mid 3)$

1. Ermittle die Geradengleichungen der drei Geraden, auf denen die Höhen des Dreiecks liegen in allgemeiner Form. Zeige, dass sich alle drei Geraden in einem Punkt schneiden.
2. Ermittle die Geradengleichungen der drei Geraden, auf denen die Seitensymmetralen liegen in allgemeiner Form. Zeige, dass sich alle drei Geraden in einem Punkt schneiden und ermittle den Radius des Umkreises.
3. Ermittle die Geradengleichungen der drei Geraden, auf denen die Schwerlinien liegen in allgemeiner Form. Zeige, dass sich alle drei Geraden in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 4. (Tangente)

Bestimme die Geradengleichung einer Geraden in allgemeiner Form, die

a) den Kreis $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$ im Punkt $A(3 \mid 1)$ berührt.

b) den Kreis $(x + 3)^2 + y^2 = 8$ im Punkt $A(-1 \mid 2)$ berührt.

c) den Kreis $x^2 + y^2 = 1$ berührt und durch den Punkt $A(2 \mid 0)$ geht.

d) den Kreis $(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 4$ berührt und durch den Punkt $A(1 \mid 2)$ geht.

WINKEL UND LAGEBEZIEHUNG

Aufgabe 5. (Lagebeziehung zweier Geraden)

Untersuche die Lagebeziehung der beiden Geraden zueinander (identisch, parallel, sich schneidend).

a) $g : x + 2y + 1 = 0$ und $h : x + 3y + 1 = 0$.

b) $g : 2x + 2y + 1 = 0$ und $h : x + y + 3 = 0$.

c) $g : -x + 3y + 2 = 0$ und $h : 2x - 6y - 4 = 0$.

d) $g : x + y - 1 = 0$ und $h : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

e) $g: 2x - 3y + 5 = 0$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

f) $g: x + y + 5 = 0$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (Winkel zwischen zwei Geraden)

Zeige, dass die beiden Geraden nicht parallel und nicht identisch sind, und ermittle den Winkel, den sie einschließen.

a) $g: 2x - y + 3 = 0$ und $h: -3x + y - 2 = 0$.

b) $g: 4x - 2y - 7 = 0$ und $h: -2x + y + 1 = 0$.

c) $g: -3x + 4y - 5 = 0$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -5 \\ -12 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

d) $g: 2x - 5y + 1 = 0$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

e) $g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

ABSTAND EINES PUNKTES ZU EINER GERADEN

Aufgabe 7. Gegeben sind eine Gerade g durch die Gleichung $ax + by + c = 0$ und ein Punkt $A(x_0, y_0)$. Beweise, dass der Abstand des Punktes A zur Geraden g mithilfe der Formel

$$d(x_0, y_0) = \frac{|\, ax_0 + by_0 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

berechnet werden kann.

Berechne mithilfe dieser Formel

a) den Abstand des Punktes $A(0 \mid 4)$ zur Geraden $x - y = 0$.

b) den Abstand des Punktes $A(2 \mid 6)$ zur Geraden $x + 2y - 6 = 0$.

c) den Abstand zwischen den Geraden $-x + 3y + 4 = 0$ und $-x + 3y - 1 = 0$.

d) den Abstand zwischen den Geraden $4x + y - 5 = 0$ und $4x + y = 0$.

e) den Abstand der Geraden $x + 2y - 10 = 0$ zum Kreis $x^2 + y^2 = 4$.

f) den Abstand der Geraden $-x + 3y - 12 = 0$ zum Kreis $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$.

Aufgabe 8. Ermittle die Geradengleichung in allgemeiner Form jener Geraden, die parallel zur Geraden g verläuft und den Abstand d vom Punkt $A(1 \mid 2)$ hat.

a) $g: x + 2y + 3 = 0, \quad d = \sqrt{5}$

b) $g: -3x + 4y - 1 = 0, \quad d = 3$

Aufgabe 9. Ermittle die Koordinaten jenes Punktes auf der Geraden g, der im Abstand d von der Geraden h liegt.

a) $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad h : x - 2y + 3 = 0, \quad d = 4$

b) $g : \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, \quad h : 3x - 4y - 2 = 0, \quad d = 3$

Aufgabe 10. $(\star)$

Gegeben sind zwei Gleichungen von Geraden in allgemeiner Form. Ermittle die Koordinaten der Punkte, die den Abstand $d = 3$ zu beiden Geraden haben.

a) $-3x + y = 0$ und $x - 3y = 0$

b) $x - y + 1 = 0$ und $4x - y + 4 = 0$