# Skalarprodukt

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 20, 2024

**Definition 1.** Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist das Produkt der Längen von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und des Kosinus des Winkels, den sie einschließen.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle(\vec{a}, \vec{b})$$

**Proposition 1.** *Gegeben sind zwei Vektoren mit ihren Koordinaten* $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *und* $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. *Dann kann das Skalarprodukt von* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *mithilfe der Vektorkoordinaten berechnet werden, und zwar*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

**Aufgabe 1.** Zeichne die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und berechne ihr Skalarprodukt auf zwei Arten, einerseits unter Verwendung der Definition des Skalarprodukts und andererseits unter Verwendung des Satzes zur Berechnung des Skalarprodukts durch Koordinaten.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 2.** Berechne den Winkel zwischen den beiden Vektoren, die durch ihre Koordinaten gegeben sind.

**Hinweis:** $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

f) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 3.** Berechne alle Winkel des Vielecks mit den angegebenen Eckpunkten.

a) Dreieck $ABC$ mit $A(0 \mid 4), B(2 \mid -1)$ und $C(8 \mid 0)$.

b) Dreieck $ABC$ mit $A(-3 \mid 2 \mid 1), B(-1 \mid 5 \mid -1)$ und $C(3 \mid 4 \mid -1)$.

c) Viereck $ABCD$ mit $A(-3 \mid 0), B(-2 \mid 2), C(1 \mid 2), D(4 \mid 0)$.

d) Viereck $ABCD$ mit $A(-3 \mid 0), B(0 \mid 3), C(3 \mid 0), D(0 \mid -7)$.

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 4.** Ermittle die Art des Dreiecks $ABC$ (spitzwinkelig, rechtwinkelig, stumpfwinkelig).

**Hinweis:** Überlege, wie die Winkelart vom Vorzeichen des Skalarprodukts der beiden Vektoren, die den Winkel einschließen, abhängt,

a) $A(-2 \mid 0), B(0 \mid 5), C(4 \mid 0)$

b) $A(-3 \mid 2), B(-1 \mid 6), C(5 \mid -2)$

c) $A(-1 \mid 5 \mid -2), B(2 \mid -1 \mid 3), C(5 \mid -1 \mid -3)$

d) $A(1 \mid -3 \mid 2), B(0 \mid -1 \mid 2), C(5 \mid -1 \mid 2)$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 5.** Untersuche, ob das angegebene Viereck ein Rechteck ist. Wenn es ein Rechteck ist, untersuche, ob es auch ein Quadrat ist.

a) $A(1 \mid 3)$, $B(4 \mid 6)$, $C(7 \mid 3)$, $D(4 \mid 0)$

b) $A(4 \mid 1)$, $B(2 \mid 7)$, $C(5 \mid 8)$, $D(10 \mid 3)$

c) $A(-3 \mid 2)$, $B(0 \mid 3)$, $C(3 \mid 0)$, $D(-1 \mid -4)$

d) $A(-4 \mid 2)$, $B(1 \mid 4)$, $C(5 \mid -6)$, $D(0 \mid -8)$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 6.** Bestimme die Koordinaten der beiden Vektoren, die orthogonal zum angegebenen Vektor $\vec{a}$ stehen, gleichlang wie $\vec{a}$ sind und unterschiedliche Orientierung haben.

Zeichne alle drei Vektoren. Stelle eine Vermutung auf, wie man einen Vektor um 90° (im Uhrzeigersinn und gegen den Uhrzeigersinn) drehen kann.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 7.** (Kreuzprodukt)

1. Gegeben sind zwei nichtkollineare Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix}$. Zeige, dass der Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} y_a z_b - z_a y_b \\ z_a x_b - x_a z_b \\ x_a y_b - y_a x_b \end{pmatrix}$ orthogonal zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

2. Ermittle die Koordinaten eines Vektors, der orthogonal zu den angegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 8.** Gegeben sind die Punkte $A(2 \mid 1)$ und $B(6 \mid 2)$. Ermittle die Koordinaten des Punktes $C$, sodass

a) das Dreieck $ABC$ gleichschenkelig und rechtwinkelig mit $\angle BAC = 90°$ ist.

**Hinweis:** Setze $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) das Dreieck $ABC$ gleichschenkelig und rechtwinkelig mit $\angle BCA = 90°$ ist.

c) das Dreieck $ABC$ rechtwinkelig mit $\angle BCA = 90°$ und $\tan(\angle BAC) = 3$ ist.

d) das Dreieck $ABC$ rechtwinkelig mit $\angle BCA = 90°$ und $\angle BAC = 30°$ ist.

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 9.** Bestimme die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte des Vierecks $ABCD$, wenn

a) $ABCD$ ein Quadrat ist, $A(-3 \mid 2)$ und $C(-1 \mid -2)$.

b) $ABCD$ ein Quadrat ist, $A(-1 \mid 1)$ und $C(1 \mid 5)$.

c) $ABCD$ ein Rechteck ist, $A(2 \mid 6)$, $B(0 \mid 3)$ und $|BC| = 4$.

d) $ABCD$ ein Rechteck ist, $A(-4 \mid 1)$, $B(4 \mid -3)$ und $|AC| = 5$.

**Quelle:** Projekt MmF.

**Aufgabe 10.** $(\star)$

Gegeben sind die Punkte $A(-1 \mid 0)$ und $B(1 \mid 0)$. Ermittle die Menge aller Punkte $C$, für die $\angle ACB$ ein rechter Winkel ist.

**Hinweis:** In dieser Aufgabe muss man einen bekannten Satz aus der Schulgeometrie mithilfe von Methoden der Vektorrechnung beweisen.

**Quelle:** Projekt MmF.