Folgen unabhängiger Experimente

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 26, 2024

BINOMIALVERTEILUNG

Definition 1. Es werden n unabhängige Zufallsexperimente durchgeführt, wobei in jedem Experiment als Ergebnis entweder Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p oder Misserfolg mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ einhilt.

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Erfolge in n Experimenten. Dann ist X **binomonalverteilt** mit den Parametern n und p (Bezeichnung: $X \sim B(n, p)$) und es gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Proposition 1. *Wenn die Zufallsvariable X binominalverteilt $B(n, p)$ ist, dann gilt*

$$\mathbb{E}(X) = np \text{ und } Var(X) = np(1 - p)$$

Aufgabe 1. Entscheide, ob die Zufallsvariable X binomialverteilt ist oder nicht. Gib die Parameter n und p an, falls X binomialverteilt ist.

a) Eine Schachtel enthält 4 rote und 3 blaue Kugeln. Man zieht eine Kugel nach dem Zufallsprinzip, notiert die Farbe und legt die Kugel wieder zurück. Man führt insgesamt 5 solche Ziehungen hintereinander durch.

   X ist die Anzahl blauer Kugeln bei den 5 Ziehungen

b) Man wirft gleichzeitig 8 faire 6-seitige Würfel mit Augenzahlen 1 bis 6.

   X ist die Anzahl der Würfel mit Augenzahl 1 oder 2.

c) Eine Schachtel enthält 5 rote und 5 blaue Kugeln. Man zieht 3 Kugeln ohne Zurücklegen aus der Schachtel.

   X ist die Anzahl blauer Kugeln unter den 3 Kugeln.

d) Ein Single-Choice-Test enthält 30 Fragen mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten. Bei jeder Frage ist genau eine Antwort richtig. Man kreuzt bei jeder Frage zufällig eine Antwortmöglichkeit an.

   X ist die Anzahl richtig beantworteter Fragen.

e) In einer Klasse sind 14 Schüler und 11 Schülerinnen. Von ihnen werden zur Stundenwiederholung nacheinander 4 verschiedene Personen ausgewählt.

   X ist die Anzahl der Schülerinnen, die zur Stundenwiederholung ausgewählt werden.

Quelle: Projekt MmF, "Mathematik auf Augenhöhe, 11. Schulstufe".

Aufgabe 2. (Urne)

In einer Urne befinden sich 2 weiße und 5 schwarze Kugeln. Man zieht 4-mal eine Kugel mit Zurücklegen.

1. Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der weißen Kugeln, die gezogen wurden. Überlege, ob X einer Binomialverteilung folgt. Gib die Parameter n und p an, falls X binomialverteilt ist.
2. Ermittle die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse. Beschreibe wenn möglich die Ereignisse mithilfe der Zufallsvariablen X.
   a) Man zieht keine weiße Kugel.
   b) Man zieht genau eine weiße Kugel.
   c) Man zieht genau zwei weiße Kugeln.
   d) Man zieht nicht mehr als eine weiße Kugel.
   e) Man zieht mindesten 3 weiße Kugeln.
3. (Gruppen) Berechne die Wahrscheinlichkeit
   a) Bei den ersten beiden Ziehungen erhält man genau eine weiße Kugel und dann zwei schwarze Kugeln.
   b) Die erste Kugel ist weiß und die drei letzen Ziehungen ergeben nicht mehr als eine weiße Kugel.
   c) Bei den ersten zwei Ziehungen erhält man genau eine weiße Kugel.
4. Berechne den Erwartungswert und die Varianz folgender Zufallsvariablen.
   a) $Y = 1$, wenn die zweite Kugel weiß ist, und $Y = 0$, wenn die zweite Kugel schwarz ist.
   b) Y ist die Anzahl der schwarzen Kugeln bei den 4 Ziehungen.
   c) Y ist die Anzahl der weißen Kugeln bei den ersten drei Ziehungen.

Aufgabe 3. (Würfel)

Man wirft einen Würfel 10-mal.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit
   a) die Zahl 1 genau einmal zu erhalten.
   b) die Zahl 1 genau dreimal zu erhalten.
2. Berechne die Wahrscheinlichkeit
   a) genau 4-mal eine Zahl zu erhalten, die kleiner als 3 ist.
   b) nicht mehr als 2-mal ein Zahl zu erhalten, die kleiner als 3 ist.
3. (Gruppen) Berechne die Wahrscheinlichkeit
   a) bei den ersten drei Würfen genau einmal die Zahl 6 und dann genau zweimal die Zahl 6 zu erhalten.
   b) bei den ersten 5 Würfen weder 5 noch 6, aber ab dem 6-ten Wurf 5 oder 6 mindestens dreimal zu erhalten.

4. (Erwartungswert und Varianz)

   Berechne Erwartungswert und Varianz folgender Zufallsvariablen. Ermittle dabei, die Parameter n und p der Binominalverteilung.

   a) Y ist die Anzahl der Fünfen nach 10 Würfen.

   b) Y ist die Anzahl der Fünfen und Sechsen nach 10 Würfen.

   c) Y ist die Anzahl der Sechsen bei den ersten 5 Würfen.

Aufgabe 4. (Zufallszahlen)

In einer Urne befinden sich 10 Kugeln. Auf 3 Kugeln steht die Zahl 1, auf 5 Kugeln steht die Zahl 0 und auf 2 Kugeln die Zahl -1.

Man zieht eine Kugel, notiert die darauf stehende Zahl und legt die Kugel anschließend zurück in die Urne. Auf diese Weise zieht man eine Kugel 8 Mal und erhält eine Folge von 8 Zahlen.

Finde die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse und beschreibe die entsprechenden Binomialverteilungen, die dabei auftreten.

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit, die Folge

   a) $1, 0, 1, 0, 1, 0, -1, -1$ zu erhalten.

   b) $-1, -1, -1, 0, 1, 1, 1, 1$ zu erhalten.

2. Berechne die Wahrscheinlichkeit

   a) genau einmal die Zahl 0 zu erhalten.

   b) genau 3-mal die Zahl 1 zu erhalten.

   c) genau 6-mal die Zahl -1 zu erhalten.

3. Berechne die Wahrscheinlichkeit

   a) maximal 1-mal die Zahl 0 zu erhalten.

   b) mindestens 5-mal die Zahl 1 zu erhalten.

   c) mindestens 2-mal eine nichtnegative Zahl zu erhalten.

4. (Gruppen) Berechne die Wahrscheinlichkeit

   a) bei den ersten 3 Zügen die Zahl 0 genau einmal zu erhalten und dann die Zahl 0 genau dreimal zu erhalten.

   b) bei den ersten 4 Zügen die Zahl 1 maximal einmal zu erhalten und danach die Zahl 0 mindestens dreimal zu erhalten.

   c) bei den ersten 2 Zügen die Zahl 1 genau einmal, bei den weiteren 3 Zügen die Zahl 1 maximal einmal und bei den weiteren 3 Zügen die Zahl 0 mindestens zweimal zu erhalten.

5. (Summen) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

   a) die Summe der ersten zwei Zahlen gleich 0 ist.

   b) die Summe von allen acht Zahlen gleich 6 ist.

   c) die Summe von allen acht Zahlen gleich 0 ist.

Aufgabe 5. (Anzahl der Experimente)

1. (Münze)
   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal Zahl zu erhalten, wenn man eine Münze 3-mal beziehungsweise 5-mal wirft.
   b) Bestimme die minimale Anzahl an Würfen, die erforderlich ist, damit die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses größer als 0.99 ist.
2. (Wurfel)
   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die Zahl 3 zu erhalten, wenn man einen Wurfel 5-mal beziehungsweise 7-mal wirft.
   b) Bestimme die minimale Anzahl an Würfen, die erforderlich ist, damit die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses größer als 0.97 ist.

GEOMETRISCHE VERTEILUNG

Definition 2. Es wird eine Serie unabhängiger Zufallsexperimente durchgeführt, wobei in jedem Experiment eintrift als Ergebnis entweder Erfolg mit Wahrscheinlichkeit p oder Misserfolg mit Wahrscheinlichkeit $1-p$.

Die Zufallsvariable X ist die Anzahl der Experimente, bis man zum ersten Mal Erfolg erhält. Dann hat die Zufallsvariable X eine **geometrische Verteilung** mit Parameter p (Bezeichnung: $X \sim G(p)$) und es gilt

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p, \quad k \geq 0.$$

Aufgabe 6. (Würfel)

Man wirft einen Würfel 8-mal. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass

a) man die Zahl 6 zum ersten Mal beim dritten Wurf erhält.

b) man die Zahl 6 zum ersten Mal früher als beim vierten Wurf erhält.

c) man die Zahl 6 erst nach dem fünften Wurf erhält.

Aufgabe 7. (Radar)

Ein Radar findet ein Objekt bei einer Iteration mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.4.

Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass:

a) es erst bei der zweiten Messung ein Objekt findet.

b) es bei den ersten drei Messungen ein Objekt nicht findet.

c) von der dritten bis zur fünften Messung ein Objekt findet.