# Stetige Zufallsvariablen. Dichtefunktionen

Dmytro Rzhemovskyi, Mariia Mykhalova
Projekt MmF

February 26, 2024

**Definition 1.** Eine Funktion $p(x)$ mit $x \in [a, b]$ heißt **Dichtefunktion**, wenn $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\int_a^b p(x)dx = 1.$$

**Definition 2.** Eine Zufallsvariable heißt **stetig** auf dem Interval $[a, b]$ mit der Dichtefunktion $p(x)$, wenn für alle Intervalle $[c, d] \subset [a, b]$

$$\mathbb{P}(X \in [c, d]) = \int_c^d p(x)dx$$

gilt.

**Aufgabe 1.** Gegeben ist die Dichtefunktion $p(x)$ einer stetigen Zufallsvariablen $X$.

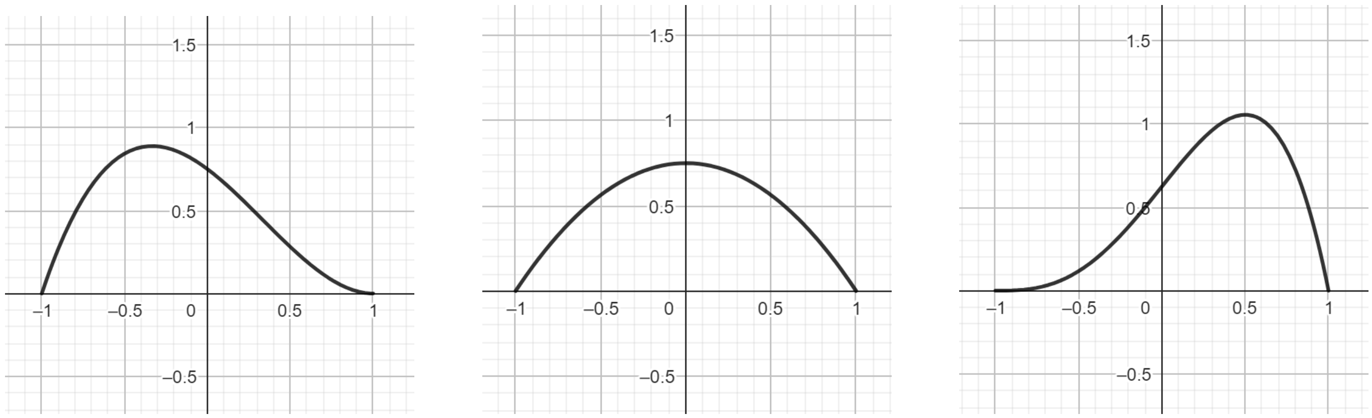
$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$


Berechne approximativ

a) $\mathbb{P}(1.5 \leq X \leq 2)$ b) $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 1.3)$ c) $\mathbb{P}(1 \leq X \leq 1.5 \mid 1 \leq X \leq 2)$

**Aufgabe 2.** Gegeben sind die Graphen der Dichtefunktionen von drei Zufallsvariablen $X, Y$ und $Z$ (siehe unten). Vergleiche die folgenden Wahrscheinlichkeiten.

a) $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 0)$ und $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$
b) $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 0)$ und $\mathbb{P}(0 \leq Y \leq 1)$
c) $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq -0.5)$ und $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq -0.5)$
d) $\mathbb{P}(0 \leq X \leq 1)$ und $\mathbb{P}(0 \leq Z \leq 1)$
e) $\mathbb{P}(0.5 \leq X \leq 1)$ und $\mathbb{P}(-1 \leq Z \leq -0.5)$
f) $\mathbb{P}(-0.1 \leq X \leq 0.1)$ und $\mathbb{P}(0.4 \leq Z \leq 0.6)$




(a) Dichtefunktion der Zufallsvariable $X$

(b) Dichtefunktion der Zufallsvariable $Y$

(c) Dichtefunktion der Zufallsvariable $Z$

Figure 1: Bilder zur Aufgabe 2

**Aufgabe 3.** Eine stetige Zufallsvariable $X$ hat Dichtefunktion $p(x)$.

1. Zeichne den Graphen der Dichtefunktion.
2. Zeige, dass die Funktion die Definition einer Dichtefunktion erfüllt.

a) $p(x) = \dfrac{1}{4}$, $x \in [-2, 2]$. Berechne

i. $\mathbb{P}(0 \le X \le 2)$ ii. $\mathbb{P}(-1 < X \le 0)$ iii. $\mathbb{P}(X \in [-2, -1] \cup [1, 2])$ iv. $\mathbb{P}(X \in \{-2, -1, 0\})$

b) $p(x) = 6x(1-x)$, $x \in [0, 1]$. Berechne

i. $\mathbb{P}(0 \le X \le 0.5)$ ii. $\mathbb{P}(\dfrac{1}{2} \le X \le 1)$ iii. $\mathbb{P}(0 \le X \le \dfrac{1}{4} \mid 0 \le X \le \dfrac{1}{2})$

c) $p(x) = e^{-x}$, $x \in [0, \infty)$. Berechne

i. $\mathbb{P}(0 \le X \le 1)$ ii. $\mathbb{P}(X > 2)$ iii. $\mathbb{P}(x \le 3 \mid X > 1)$

**Aufgabe 4.** Untersuche, ob die Funktion $f(x)$ eine Dichtefunktion ist.

a) $f(x) = 3x^3$, $x \in [0, 1]$ b) $f(x) = \dfrac{4}{3x^2}$, $x \in [1, 4]$ c) $f(x) = x(2-x)$, $x \in [0, 2]$

Finde eine Zahl $c > 0$, sodass die Funktion $cf(x)$ eine Dichtefunktion ist.

**Aufgabe 5.** (Standardnormalverteilung)

Eine stetige Zufallsvariable $X$ ist standardnormalverteilt, wenn sie die folgende Dichtefunktion hat.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Skizziere den Graphen der Funktion $p(x)$.

b) Vergleiche die folgenden Wahrscheinlichkeiten

a) $\mathbb{P}(X > 0)$ und $\mathbb{P}(X < 0)$ b) $\mathbb{P}(0 < X < 1)$ und $\mathbb{P}(1 < X < 2)$

**Aufgabe 6.** (Exponentialverteilung)

Eine stetige Zufallsvariable $X$ ist exponentialverteilt, wenn sie die folgende Dichtefunktion hat.

$$p(x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

a) Skizziere den Graphen der Funktion $p(x)$.

b) Vergleiche die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(0 < X < 1)$ und $\mathbb{P}(1 < X < 2)$.

c) Ermittle die Zahl $a > 0$, sodass $\mathbb{P}(X < a) = 0.5$.

**Aufgabe 7.** (Gamma-Verteilung)

Eine stetige Zufallsvariable $X$ ist Gamma-verteilt, wenn sie die folgende Dichtefunktion hat.

$$p(x) = xe^{-x}, \quad x \geq 0.$$

a) Skizziere den Graph der Funktion $p(x)$.

b) Zeige, dass die Funktion $p(x)$ die Definition einer Dichtefunktion erfüllt.

c) Berechne $\mathbb{P}(0 < X < 1)$ und $\mathbb{P}(1 < X < 2)$.