

1 Gleichungen

Aufgabe 1.1. (A) Wenn man eine Tasse Kaffee trinkt, nimmt man Koffein für 1 Stunde auf. Wenn man eine genauso große Tasse Espresso trinkt, führt man seinem Körper Koffein für 4 Stunden zu. In welchem Verhältnis muss man Kaffee mit Espresso mischen, um in einer Tasse das Koffein für genau 2 Stunden zu haben?

Quelle: Naborj 2014, #3J.

Aufgabe 1.2. (A) Doris will die Kaffeemaschine entkalken. In der Anleitung steht, dass sie dafür eine Mischung aus vier Teilen Wasser mit einem Teil 10%-iger Essigessenz verwenden soll. Sie hat aber nur eine 40%-ige Essigessenz zur Hand. Wie viele Teile Wasser muss sie mit einem Teil dieser Essigessenz mischen, damit sie das gleiche Mischverhältnis erhält?

Hinweis: Eine $n\%$ -ige Essigessenz besteht zu n Teilen aus Essig und zu $100 - n$ Teilen aus Wasser.

Quelle: Naborj 2018, #5J.

Aufgabe 1.3. (A) Herr Zucker kaufte eine große Schachtel seiner Halloween-Lieblingssüßigkeiten, um sie an vorbeikommende Kinder zu verteilen. Jedoch aß er die Hälfte davon bereits, bevor das erste Kind vorbeikam und einen gewissen Anteil erhielt. Danach aß er die Hälfte der noch verbliebenen Süßigkeiten, bis das zweite Kind kam, und wieder die Hälfte des Restes, bevor das dritte Kind kam und den gesamten Rest erhielt. Wenn jedes Kind genau drei Süßigkeiten erhielt, wie viele Süßigkeiten kaufte Herr Zucker?

Quelle: Naborj 2019, #5J.

Aufgabe 1.4. (A) Zaphod, ein berühmter Sammler von Himmelskörpern, musste aufgrund von finanziellen Schwierigkeiten ein Drittel seiner Sammlung verkaufen. Anschließend schenkte er seiner Tochter drei Planeten des Sonnensystems. Später veräußerte er ein Drittel der verbliebenen Himmelskörper seiner Sammlung und vermachte seiner Frau zwei Jupitermonde sowie zwei Monde des Saturn. Als er sich erneut gezwungen sah, weitere Teile seiner Sammlung zu Geld zu machen, verkaufte er abermals ein Drittel seiner Himmelskörper, die er noch besaß, und schenkte seinem Sohn den Mars und dessen zwei Monde. Schließlich waren in seiner Sammlung nur noch neun Planeten aus Alpha Centauri übrig. Wie viele Himmelskörper besaß Zaphod zu Beginn?

Quelle: Naborj 2014, #1S.

Aufgabe 1.5. (A) Zwei Nationen A und B kämpfen gegeneinander mit insgesamt 1000 beteiligten Soldaten. Die Armeen wechseln sich mit dem Angreifen ab. Bei jedem Angriff schießt jeder Soldat der angreifenden Armee einen Soldaten der feindlichen Armee nieder. Die Schlacht endet (nicht unbedingt durch die Vernichtung einer der Seiten) nach drei Angriffen (zuerst schießt A, dann B und schließlich wieder A). Welche ist die kleinste garantierte Anzahl an Überlebende?

Quelle: Naborj 2011, #17S.

Aufgabe 1.6. (B) Tim hat reelle Zahlen x, y und z gefunden, die $\frac{x - y}{z - y} = -10$ erfüllen. Was sind die möglichen Werte von $\frac{x - z}{y - z}$?

Quelle: Naborj 2011, #6S.

Aufgabe 1.7. (B) Wie viele Tripel positiver ganzer Zahlen (a, b, c) gibt es, die gleichzeitig die Gleichung

$$\frac{\frac{a}{c} + \frac{a}{b} + 1}{\frac{b}{a} + \frac{b}{c} + 1} = 11$$

und die Ungleichung $a + b + c \leq 30$ erfüllen?

Quelle: Naborj 2011, #15S.

Aufgabe 1.8. (B) Gegeben seien zwei reelle Zahlen a und b mit $a > b > 0$, die die Gleichung

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2013$$

erfüllen. Bestimme den Wert von $\frac{a+b}{a-b}$.

Quelle: Naborj 2013, #21S.

Aufgabe 1.9. (B) Bestimme alle reellen Zahlen x mit

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}$$

Hinweis: Substitution.

Quelle: Naborj 2011, #38S.

Aufgabe 1.10. (C) Es sei x eine reelle Zahl, für welche die Gleichung $x^3 + 4x = 8$ gilt. Bestimme den Wert von $x^7 + 64x^2$.

Quelle: Naborj 2015, #26S.