

ОЗНАЧЕННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

- Градусна і радіанна міри кутів
- Означення \sin і \cos із одиничного кола
- Означення tg і ctg через \sin і \cos
- Знаходження базових значень функцій

16.1.° Знайдіть радіанну міру кута, який дорівнює:

- 1) 25° ; 2) 40° ; 3) 100° ; 4) 160° ; 5) 210° ; 6) 300° .

16.2.° Знайдіть градусну міру кута, радіанна міра якого дорівнює:

- 1) $\frac{\pi}{10}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) $\frac{\pi}{9}$; 4) $1,2\pi$; 5) 3π ; 6) $2,5\pi$.

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 16.1, 16.2

16.8.° У якій координатній чверті знаходиться точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) 400° ; 2) 750° ; 3) -470° ; 4) $-\frac{7\pi}{6}$; 5) $-1,8\pi$; 6) $6?$

- Визначити знак \sin , \cos , tg

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 16.8

18.1.° Додатним чи від'ємним числом є значення тригонометричної функції:

- 1) $\sin(-280^\circ)$; 3) $\sin(-130^\circ)$; 5) $\sin(-3)$; 7) $ctg \frac{7\pi}{4}$;
 2) $\cos 340^\circ$; 4) $\cos 2$; 6) $tg 1$; 8) $tg \frac{5\pi}{6}?$

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 18.1

16.10.° Знайдіть координати точки одиничного кола, отриманої в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) -90° ; 2) -180° ; 3) $\frac{5\pi}{2}$; 4) $-\frac{3\pi}{2}$; 5) 450° ; 6) -2π .

16.11.° Які координати має точка одиничного кола, отримана в результаті повороту точки $P_0(1; 0)$ на кут:

- 1) $\frac{3\pi}{2}$; 2) 3π ; 3) $-\frac{\pi}{2}$; 4) 180° ; 5) $-540^\circ?$

Додатково: визначити \sin , \cos , tg , ctg

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 16.10, 16.11

Якщо $2\cos\alpha - 5\sin\alpha = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha =$

Джерело: ЗНО 2020, пробний тест, №15

Якщо $2\sin\alpha = \cos\alpha$, то $\operatorname{tg}\alpha =$

Джерело: ЗНО 2017, додаткова сесія, №15

Обчисліть $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $4\sin\alpha - \cos\alpha = 2\cos\alpha - \sin\alpha$.

Джерело: ЗНО 2016, пробний тест, №19

Обчисліть значення виразу $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$.

Джерело: ЗНО 2016, додаткова сесія, №16

$1 - \sin\alpha \operatorname{ctg}\alpha \cos\alpha =$

Джерело: ЗНО 2018, основна сесія, №13

$\frac{\cos\alpha \operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha} =$

Джерело: ЗНО 2020, додаткова сесія, №13

Спростіть вираз $2\sin^2\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

Джерело: ЗНО 2019, додаткова сесія, №13

22.9.* Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$, якщо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$;

Джерело: Мерзляк, 10 клас, №22.9

ОСНОВНА ТРИГОНОМЕТРИЧНА ТОТОЖНІСТЬ

$1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha =$

Джерело: ЗНО 2017, основна сесія, №12

Обчисліть значення виразу $4\sin^2\alpha$, якщо $4\cos^2\alpha = 1$.

Джерело: НМТ 2022, основна сесія, №15

$$\frac{7 - (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)}{3 \sin^2 \beta + 3 \cos^2 \beta} =$$

Джерело: ЗНО 2021, додаткова сесія, №10

Спростіть вираз $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)\sin^2\alpha$.

Джерело: ЗНО 2020, основна сесія, №14

Спростіть вираз $(1 - \sin^2 \alpha) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$.

Джерело: ЗНО 2019, основна сесія, №10

22.1.° Спростіть вираз:

- | | |
|---|---|
| 1) $(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2$; | 5) $\frac{1 - \operatorname{ctg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \gamma}$; |
| 2) $\sin^4 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha$; | 6) $\cos^4 \alpha - \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$; |
| 3) $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$; | 7) $\sin^4 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha$; |
| 4) $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}$; | 8) $\cos(-\alpha) + \cos \alpha \operatorname{tg}^2(-\alpha)$. |

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 22.1

22.3.° Знайдіть значення тригонометричних функцій аргументу α , якщо:

- | | |
|---|--|
| 1) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$; | 3) $\operatorname{tg} \alpha = 2$ і $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; |
| 2) $\sin \alpha = 0,6$ і $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; | 4) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{4}{3}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. |

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 22.3

22.9.° Знайдіть значення виразу:

- 2) $\frac{2 \cos^2 \alpha - 7 \sin^2 \alpha}{3 \cos^2 \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = -2$;
- 3) $\frac{8 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 5 \sin^2 \alpha \cos \alpha - 8 \cos^3 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -3$.

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, №22.9

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

24.1.° Обчисліть значення тригонометричної функції:

1) $\cos 225^\circ$; 2) $\sin 240^\circ$; 3) $\cos \frac{5\pi}{4}$; 4) $\cos \left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 24.1

Якому проміжку належить значення виразу $\sin \frac{7\pi}{6} - 1$?

Джерело: ЗНО 2019, пробний тест, №15

$$\frac{\cos(90^\circ + \alpha)}{\sin \alpha} =$$

Джерело: ЗНО 2018, додаткова сесія, №10

Спростіть вираз $2 \cos(450^\circ + \alpha) - \sin \alpha$.

Джерело: ЗНО 2021, пробний тест, №14

24.3.° Спростіть вираз:

1) $\frac{\sin(\pi + \alpha) \cos(2\pi - \alpha)}{\operatorname{tg}(\pi - \alpha) \cos(\pi - \alpha)}$;

2) $\sin(\pi - \beta) \cos\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) \cos(\pi - \beta)$;

3) $\sin^2(\pi - x) + \operatorname{tg}^2(\pi - x) \operatorname{tg}^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(x - 2\pi)$;

24.4.° Доведіть тотожність:

1) $\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin(\alpha + 2\pi)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = -\cos \alpha$;

2) $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = 1$;

3) $\sin(2\pi - \varphi) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) - \cos(\varphi - \pi) - \sin(\varphi - \pi) = \sin \varphi$;

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 24.3. 24.4

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

- Властивості тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$
 - Область визначення і область значень
 - Періодичність
- Вплив перетворень функції на її властивості

Намалювати графіки функцій

- $y = \sin x$, на проміжку $[-4\pi, 4\pi]$
- $y = \cos x$, на проміжку $[-4\pi, 4\pi]$
- $y = \operatorname{tg} x$, на проміжку $[-3\pi/2, 3\pi/2]$
- $y = \operatorname{ctg} x$, на проміжку $[-2\pi, 2\pi]$

Вказати:

- Проміжки зростання і спадання функції.
- Значення x , при яких функція дорівнює 0, 1, -1.

Джерело: Projekt MmF

Побудувати графік функції і вказати область значень та амплітуду.

- $y = \sin x + 1$
- $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$
- $y = 2\sin x$
- $y = -\cos x + 3$
- $y = 3\sin(x + \pi) - 5$
- $y = 0.5\sin(x - \frac{\pi}{3}) - 0.5$
- $y = -2\cos x + 2$

Джерело: Projekt MmF

Укажіть область значень функції $y = 2\cos x + 3$.

- Намалювати графік функції.

Джерело: ЗНО 2020, пробний тест, №18

Знайти область визначення функції і намалювати графік функції

- $f(x) = \operatorname{tg}(x - \pi/2)$
- $f(x) = \operatorname{ctg}(x + \pi)$
- $f(x) = -\operatorname{tg}(x + \pi/2)$

Джерело: Projekt MmF

Знайти значення параметра b , при якому:

- точка $(\pi/4, 2)$ належить графіку функції $b * tg x$
- точка $(\pi/4, 2)$ належить графіку функції $tg x + b$
- точка $(-\pi/4, 0)$ належить графіку функції $tg(x + b)$
- точка $(3\pi/4, 1)$ належить графіку функції $b * ctg x$
- точка $(3\pi/4, 1)$ належить графіку функції $ctg x + b$
- пряма $x = \pi/2$ є асимптотою графіка функції $ctg(x + b)$

Джерело: Projekt MmF

Побудувати графіки і вказати нулі наступних функцій на проміжку $[-2\pi, 2\pi]$.
Висунути гіпотезу щодо перетворення функції $f(kx)$.

- $y = \sin(x)$
- $y = \sin(2x)$
- $y = \sin(0.5x)$

Джерело: Projekt MmF

Намалювати графіки наступних функцій.

- $f(x) = \sin(2x)$
- $f(x) = \cos(0.5x)$
- $f(x) = \cos(3x)$
- $f(x) = tg(4x)$
- $f(x) = ctg(0.25x)$

Вказати області визначення і періоди функцій.

Джерело: Projekt MmF

Знайти графічно кількість розв'язків рівняння:

- $\cos x = x$
- $\cos x = x^2 + 0.5$
- $\sin x - 1 = 1/x^2$
- $\sin x = \cos x$, на відрізку $[0, 2\pi]$

Джерело: Projekt MmF

ПОХІДНІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Знайти похідну функції:

$$y = 4 \sin x - 5 \cos x; \quad y = x^4 \cos x;$$

$$y = \operatorname{tg} x - 9x; \quad y = x \operatorname{tg} x.$$

$$y = \frac{x^3}{\cos x}; \quad y = \frac{\sin x}{x};$$

$$y = \sqrt{\sin x}; \quad y = \cos 2x;$$

$$y = \sin \sqrt{x}. \quad y = \sin^2 x;$$

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 37.1 - 37.6

Знайти рівняння дотичної до графіка функції

- $y = \sin x$ в точці $x = 0$ та в точці $x = \pi/6$

- $y = \operatorname{tg} x$ в точці $x = 0$ та в точці $x = \pi/4$

Джерело: Projekt MmF

Довести, що функція є спадною.

$$f(x) = \sin 2x - 3x.$$

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 39.10

Знайти проміжки зростання і спадання функції

$$1) f(x) = \sin x - x; \quad 2) f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \sin x$$

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, № 39.13

Побудувати графік функції $f(x) = \sin x + \cos x$.

Джерело: Projekt MmF

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ РІВНЯННЯ

- Базові тригонометричні рівняння
 - На відрізку
 - На всій числовій прямій з використанням періодичності

Укажіть кількість коренів рівняння $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ на відрізку $[0; 3\pi]$.

- Графічно пояснити розв'язання рівняння.

Джерело: НМТ 2023, демо, №15

Вказати кількість коренів рівняння на відрізках $[0, 2\pi]$, $[0, 3\pi]$, $[-\pi, 2\pi]$. Пояснити графічно.

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin 0.5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\sin(x + \frac{2\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Джерело: Проект MmF

Розв'язати рівняння на відрізку і пояснити розв'язання графічно.

- $\sin x = 1$ на $[0, 2\pi]$, на $[0, 4\pi]$, на $[-4\pi, 4\pi]$
 - Визначити закономірність і розв'язати на R
- $\cos x = \frac{1}{2}$ на $[-\pi, \pi]$, на $[-\pi, 3\pi]$, на $[-3\pi, 3\pi]$
 - Визначити закономірність і розв'язати на R
- $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ на $[-\pi/2, \pi/2]$, на $[-3\pi/2, 3\pi/2]$
 - Визначити закономірність і розв'язати на R

Джерело: Проект MmF

Розв'яжіть рівняння $3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$.

Джерело: ЗНО 2016, основна сесія, №19

Розв'яжіть рівняння $\cos(3x) = \frac{1}{2}$.

Вказівка: заміна змінної

Джерело: ЗНО 2019, додаткова сесія, №20

27.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$\begin{array}{ll} 1) \cos 3x = -\frac{1}{2}; & 3) \cos 6x = 1; \\ 2) \cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}; & 4) \cos \frac{2\pi x}{3} = 0; \end{array}$$

27.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \cos\left(\frac{x}{6} - 2\right) = -1; \quad 3) 2 \cos\left(\frac{\pi}{8} - 3x\right) + 1 = 0.$$

28.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin \frac{x}{6} = -\frac{1}{2}; \quad 2) \sin 5x = 1;$$

28.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 2) \sin\left(\frac{x}{3} + 1\right) = -1; \quad 3) \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12} - 3x\right) - 1 = 0.$$

29.3.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg}\left(-\frac{7x}{4}\right) = \sqrt{3}; \quad 2) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0;$$

29.5.° Розв'яжіть рівняння:

$$1) \operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 3) \sqrt{3} \operatorname{ctg}\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 = 0;$$

Вказівка: використати заміну змінної.

Джерело: Мерзляк, Алгебра 10 клас, №27.3, 27.5, 28.3, 28.5, 29.3, 29.5

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ НЕРІВНОСТІ

Розв'язати нерівність за допомогою графіка відповідної функції.

$\sin x > 0$ на відрізку $[0, 4\pi]$ і на

$\sin x < -1/2$ на відрізку $[-2\pi, 2\pi]$

$\cos 2x > \sqrt{3}/2$ на відрізку $[-\pi/2, 3\pi/2]$

$\cos(x - \pi/4) > 1/2$ на відрізку $[-\pi/2, 3\pi/2]$

$\operatorname{tg} x > -1$ на відрізку $[-3\pi/2, 3\pi/2]$

$\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$ на відрізку $[-2\pi, 2\pi]$

$\operatorname{ctg}(x + \pi/4) < \sqrt{3}$ на відрізку $[-2\pi, 2\pi]$

$\operatorname{tg} 0.5x > 1$ на відрізку $[-3\pi/2, 3\pi/2]$

Всі нерівності розв'язати також на множині дійсних чисел.

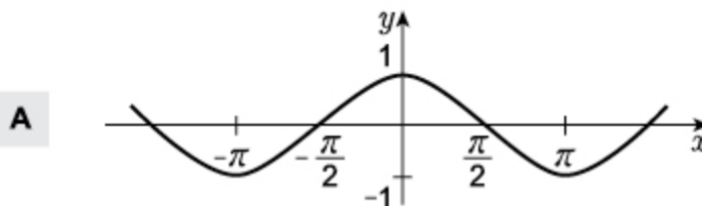
Джерело: Проект МмФ

Установіть відповідність між функціями (1–4) та їхніми графіками (А–Д).

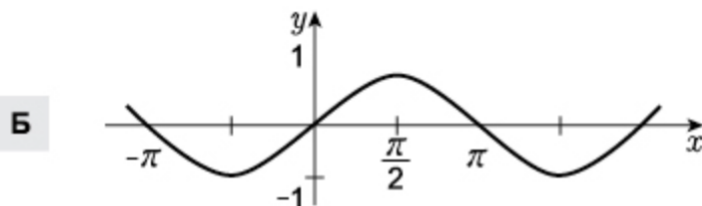
Функція

Графік функції

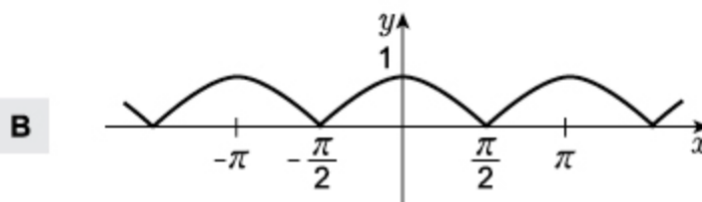
1 $y = \sin x$



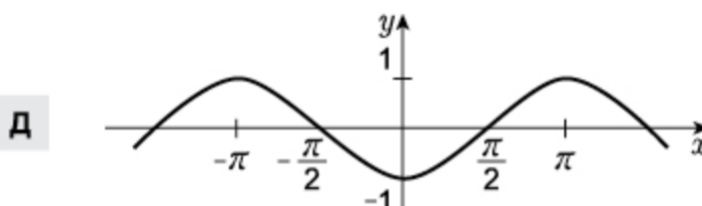
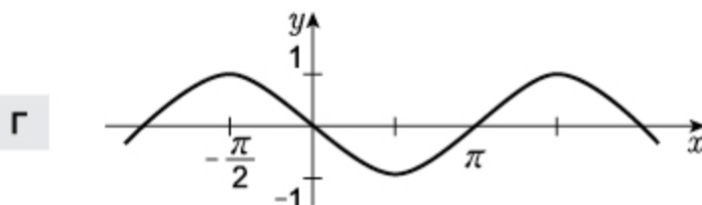
2 $y = -\cos x$



3 $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$



4 $y = \cos|x|$



Джерело: ЗНО 2011, пробний, №26