



52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenenkurs-I „Mathematik macht Freu(n)de“

18. September 2020

1.)	<p>a) Zeige, dass $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ gilt.</p> <p>b) Bestimme die Summe $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$</p>	
2.)	Löse in den ganzen Zahlen: $4x^2 - 7 = y^2$	18/19 16. Nov 4.)
3.)	Löse in den ganzen Zahlen $\frac{x^2+3x}{2x-1} = y$	18/19 16. Nov 6.)
4.)	Für welche ganze Zahl a hat die Gleichung $x^3 + (a-3)x^2 + (-3-3a)x + 8 = 0$ mindestens eine ganzzahlige Lösung?	Ballik Z 5.20
5.)	Löse in den ganzen Zahlen die Gleichung $x^2 + x = xy + y + 19$	EB 18/19 16.11. 9.)
6.)	<p>Sei $f(x) = x-1 + x-2 + \dots + x-100$</p> <p>a) Wie groß ist der kleinste Funktionswert von $f(x)$?</p> <p>b) Für welche reelle Zahl(en) x wird dieser kleinste Wert angenommen?</p>	Andreescu Treasures S 13
7.)	Für welche ganze Zahl x ist $ x(x+2) - 3 $ eine Primzahl?	EB
8.)	<p>In einem spitzwinkligen Dreieck ABC sei H der Höhenschnittpunkt und H_a, H_b, H_c die Seitenhalbierungspunkte der Seiten a, b, c (in üblicher Bezeichnung). Der Kreis k_a mit Mittelpunkt H_a geht durch H. Der Kreis k_b mit Mittelpunkt H_b geht durch H. Der Kreis k_c mit Mittelpunkt H_c geht durch H.</p> <p>Der Kreis k_a schneidet die Seite a in P und Q. Der Kreis k_b schneidet die Seite b in R und S. Der Kreis k_c schneidet die Seite c in T und U. Zeige, dass die Punkte P, Q, R, S, T, U auf einem Kreis liegen.</p>	IMO 2008
9.)	11.) Löse in \mathbb{R} : $[x]^2 + [x] = x^2 - \frac{1}{4}$	LW 2007