52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittenen-I-Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 25. September 2020

1. Es sei ABC ein gleichschenkeliges Dreieck mit $AC = BC$. Auf dem Bogen CA seines Umkreises, der B nicht enthält, liege ein Punkt P. Der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade AP werde mit E bezeichnet, der Fußpunkt der Normalen durch C auf die Gerade BP werde mit F bezeichnet.

   Man beweise, dass die Strecken AE und BF gleich lang sind.
   (Walther Janous)

2. Es seien x und y reelle Zahlen. Beweise:

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) + 4(x - 1)(y - 1) \geq 0.$$

3. Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n für die $n(n + 9)$ eine Quadratzahl ist.

4. Es seien x und y positive reelle Zahlen mit $x + y = 1$. Beweise:

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y+1}{y}\right)^2 \geq 18$$

5. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Bestimme den Winkel $\angle AGB$!

6. Sei ABC ein Dreieck und seien X, Y und Z beliebige Punkte auf AB, BC und CA. Man konstruiere einen Kreis durch A, X und Z, einen Kreis durch B, X und Y und jenen Kreis durch C, Y und Z, und zeige, dass diese sich in einem Punkt schneiden.

7. In einem gleichschenkeligen Dreieck ABC mit $AC = BC$ sei H der Höhenschnittpunkt und O der Umkreismittelpunkt. Die Parallele zur Seite AC durch den Punkt H schneide die Seite BC im Punkt D.

   Zeige: BO steht normal zu OD.

8. Es seien k und l zwei Kreise, welche sich in A und B schneiden. Es sei P ein Punkt auf k, PA und PB schneiden l jeweils ein zweites Mal in Q bzw. R. Zeige: QR steht normal auf den Durchmesser von k, der P enthält.