52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Fortgeschrittene II Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 25. September 2020

1. a) Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass $a^2 - b^2 = 987654$.
   b) Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen a und b gibt, sodass $a^3 - b^3 = 987654$.[1]
2. Seien a und b natürliche Zahlen und p eine Primzahl, sodass $a^2 + p^2 = b^2$.
   Man beweise, dass $2(b + p)$ das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. [1]
3. Man bestimme die Anzahl der 6-stelligen Zahlen, die die folgende Eigenschaft besitzen: Wenn wir die ersten, bzw. die letzten beiden Ziffern der Zahl entfernen, erhalten wir zwei 4-stellige Zahlen, die zueinander kongruent modulo 99 sind. [1]
4. Wie viele Paare (m, k) positiver ganzer Zahlen gibt es, sodass $20m = k(m-15k)$ gilt?[1]
5. Finde alle natürlichen Zahlen a, b, c und d, sodass die drei Bedingungen
   $a^3 = b^2$, $c^5 = d^4$ und $a - c = 9$ gleichzeitig erfüllt sind. [1]
6. Finde alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen a und b, sodass die beidem Gleichungen
   $a^3 - 3b = 15$ und $b^2 - a = 13$ erfüllt sind. [1]
7. Sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und seien sowohl $2n - 1$ als auch $3n - 2$ Quadrate natürlicher Zahlen.
   Man beweise, dass $10n - 7$ nicht prim ist. [1]
8. Finde alle Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b, sodass die Gleichung
   $(7a - b)^2 = 2(a - 1)b^2$ gilt. [1]
9. Man beweise, dass es für jede natürliche Zahl $n \geq 3$, n verschiedene natürliche Zahlen gibt, deren Summe von Kehrwerten gleich 1 ist. [1]
10. Eine 100-stellige Zahl heißt “flackernd“, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt: Egal welche Ziffer wir entfernen, erhalten wir eine 99-Stellige Zahl, die durch 7 teilbar ist. Wie viele flackernde Zahlen gibt es? [1]

Literatur

[1] Kroatischer Regionalwettbewerb Natjecanja iz matematike u RH. `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`. (aufgerufen am 24. September 2020).