



## 52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior\*innenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“

18. September 2020

1.)	Für welche ganze Zahl $x$ ist $ x(x+2)-3 $ eine Primzahl?	
2.)	Bestimme $S = 2021^2 - 2020^2 + 2019^2 - 2018^2 + \dots + 1^2 - 0^2$	
3.)	Auf den Seiten AB, BC, CD, DA des Einheitsquadrats (Seitenlänge = 1) wird jeweils ein Punkt P, Q, R, S markiert. Diese 4 Punkte sind die Eckpunkte eines Vierecks PQRS mit den Seitenlängen $a=PQ$ , $b=QR$ , $c=RS$ , $d=SA$ . Zeige, dass (i) $a+b+c+d \leq 4$ . (ii) $a+b+c+d \geq 2\sqrt{2}$	
4.)	Zeige: Für beliebige positive ganze Zahlen $a, b$ lässt sich der Bruch $\frac{a^2(a^2+5)}{7b(5b^2+1)}$ durch 6 kürzen.	
5.)	Seien $a, b, c$ positive ganze gerade Zahlen so, dass $a, b, c$ die Seitenlängen eines Dreiecks sind. Zeige: Es gibt ganze Zahlen $x, y, z$ sodass $a = y + z$ $b = z + x$ $c = x + y$	
6.)	Zeige, dass für alle $x \geq 0$ die Ungleichung $2x+1 \geq 2\sqrt{x(1+x)}$ gilt.	
7.)	Für welche Paare $(x, y)$ reeller Zahlen gilt: $xy^2 - xy - x^2y + x^2 = 0$ ?	
8.)	Löse in den reellen Zahlen $ x-4  = 3 \cdot  x-2 $	
9.)	In einem $4 \times 4$ -Quadrat sind 16 kleine $1 \times 1$ -Quadrate eingezeichnet. Wie viele Quadrate sind zu sehen? Wie viele Quadrate sind in einem $8 \times 8$ -Raster zu sehen?	
10.)	Für welche reellen Zahlen hat der Ausdruck $f(x) =  x-1  +  x-2  +  x-3  +  x-4 $ den kleinstmöglichen Wert?	