



52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innenkurs „Mathematik macht Freu(n)de“

18. September 2020

| | | |
|------|---|--|
| 1.) | Für welche ganze Zahl x ist $ x(x+2)-3 $ eine Primzahl? | |
| 2.) | Bestimme $S = 2021^2 - 2020^2 + 2019^2 - 2018^2 + - \dots + 1^2 - 0^2$ | |
| 3.) | Auf den Seiten AB, BC, CD, DA des Einheitsquadrats (Seitenlänge = 1) wird jeweils ein Punkt P, Q, R, S markiert. Diese 4 Punkte sind die Eckpunkte eines Vierecks PQRS mit den Seitenlängen $a=PQ$, $b=QR$, $c=RS$, $d=SA$. Zeige, dass (i) $a+b+c+d \leq 4$. (ii) $a+b+c+d \geq 2\sqrt{2}$ | |
| 4.) | Zeige: Für beliebige positive ganze Zahlen a, b lässt sich der Bruch $\frac{a^2(a^2+5)}{7b(5b^2+1)}$ durch 6 kürzen. | |
| 5.) | Seien a, b, c positive ganze gerade Zahlen so, dass a, b, c die Seitenlängen eines Dreiecks sind. Zeige: Es gibt ganze Zahlen x, y, z sodass $a = y + z$ $b = z + x$ $c = x + y$ | |
| 6.) | Zeige, dass für alle $x \geq 0$ die Ungleichung $2x+1 \geq 2\sqrt{x(1+x)}$ gilt. | |
| 7.) | Für welche Paare (x, y) reeller Zahlen gilt: $xy^2 - xy - x^2y + x^2 = 0$? | |
| 8.) | Löse in den reellen Zahlen $ x-4 = 3 \cdot x-2 $ | |
| 9.) | In einem 4×4 -Quadrat sind 16 kleine 1×1 -Quadrate eingezeichnet. Wie viele Quadrate sind zu sehen? Wie viele Quadrate sind in einem 8×8 -Raster zu sehen? | |
| 10.) | Für welche reellen Zahlen hat der Ausdruck $f(x) = x-1 + x-2 + x-3 + x-4 $ den kleinstmöglichen Wert? | |