

52. Österreichische Mathematik-Olympiade

Junior*innen -Kurs „Mathematik macht Freu(n)de“

25. September 2020

1. Bestimme alle reellen Zahlen x , für die

(a)

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} = x + 5$$

(b)

$$|4x - 8| \geq |8x - 4|$$

(c)

$$x - \sqrt{2x + 9} = 3$$

(d)

$$\sqrt{20 - 4x} < x - 2$$

gilt. [2]

2. Zu jeder Seite eines Quadrats wird mit roter Farbe eine positive ganze Zahl geschrieben. Zu jedem Eckpunkt wird mit grüner Farbe das Produkt der beiden roten Zahlen geschrieben, die bei den angrenzenden Seiten stehen. Die Summe der grünen Zahlen sei 40.

Welche Werte sind für die Summe der roten Zahlen möglich? [3, Gerhard Kirchner, Landeswettbewerb für Anfänger 2009]

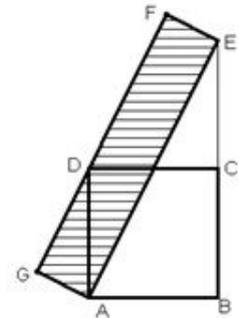
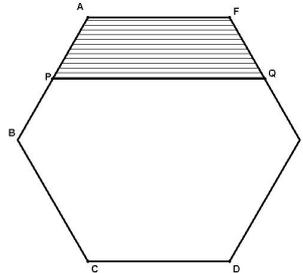
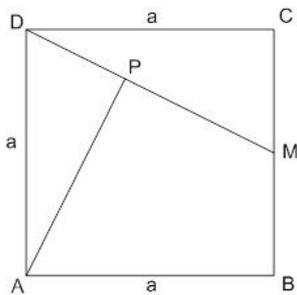
3. Im Dreieck ABC sind D , E und F die Mittelpunkte der Seiten AB , BC und CA . G ist der Fußpunkt der Höhe durch C .

Man zeige, dass die Strecken DF und EG gleich lang sind.

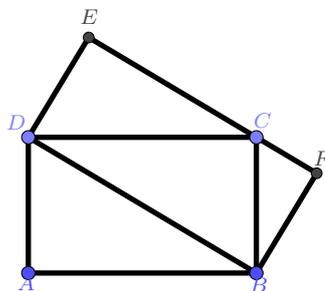
4. Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ und M sei der Mittelpunkt der Seite BC . Der Fußpunkt des Lotes von A auf DM sei P (vgl. Fig.).

Beweise:

$$a) \overline{AP} = 2\overline{DP}, \quad b) \overline{DP} : \overline{PM} = 2 : 3, \quad c) \overline{AB} = \overline{BP}$$



5. Es sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Die Punkte P und Q seien die Mittelpunkte der Seiten AB bzw. EF . Wie groß ist der Flächeninhalt des Trapezes $APQF$, wenn der Flächeninhalt des Sechsecks 48cm^2 ist (vgl. Fig.). [Wiener Mathematik und Denksport Wettbewerb 2014]
6. Das Quadrat $ABCD$ hat die Seitenlänge $s = 6\text{cm}$. Wie groß ist der Flächeninhalt des Rechtecks $AEFG$, wenn E auf der Seite BC liegt und $\overline{EC} = \overline{BC}$ (vgl. Fig.)?
7. Herr Anton kauft Markenpackungen zum Stückpreis von 40 Euro, 10 Euro und 1 Euro. Er bezahlt 259 Euro für 100 Packungen. Wie viele Markenpackungen der billigsten Sorte hat er gekauft?
8. Es seien a, b, c und d reelle Zahlen mit $a < b < c < d$. Man ordne $x = a \cdot b + c \cdot d$, $y = b \cdot c + a \cdot d$ und $z = c \cdot a + b \cdot d$ der Größe nach und beweise die angegebene Reihenfolge. [1, Richard Henner]
9. Wie viele Zahlen von 1 bis 1000 enthalten nicht die Ziffer 7?
10. Das Rechteck $ABCD$ hat die Seitenlängen $AB = CD = 8\text{cm}$ und $AD = BC = 6\text{cm}$. Berechne den Flächeninhalt des über der Diagonalen BD errichteten Rechtecks $BDFE$, dessen Seite EF durch den Eckpunkt C des ursprünglichen Rechtecks geht.



Literatur

- [1] Junior-Regionalwettbewerb 2014. <https://oemo.at/OeMO/Downloads/datei/82>. (aufgerufen am 24. September 2020).
- [2] Tom Ballik. *Mathematik-Olympiade (für Anfänger)*. ikon VerlagsGesmbH, 2012.
- [3] Gerd Baron et al. *Österreichische Mathematik-Olympiaden 2009–2018: Aufgaben und Lösungen*. Nova MD, 2019.