universität wien | PH NÖ Pädagogische Hochschule Niederösterreich

50. Österreichische Mathematik-Olympiade

1.Februar 2019

Vorbereitungskurs (**A**) „Mathematik macht Freu(n)de“

A_2019_02_01

1.) Für welche reellen Zahlen m gilt: Die Summe der Kuben der reellen Lösungen der Gleichung $x^2 - 2mx - 1 = 0$ stimmen mit dem Achtfachen der Summe der beiden Lösungen überein?	LW 2001 G.Baron
2.) Löse in den ganzen Zahlen $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$	
3.) Wenn $\sqrt[3]{r} + \frac{1}{\sqrt[3]{r}} = 3$ ist, so ist $r^3 + \frac{1}{r^3}$ wie groß?	Andreescu: Treasures S7 Pr9
4.) Beweise, dass $n^2 + 18$ für keine natürliche Zahl n eine Quadratzahl darstellt.	
5.) Beginnend mit 1 werden so lange aufeinanderfolgende natürliche Zahlen addiert, bis sich erstmals als Summe eine dreistellige aus lauter gleichen Ziffern bestehende Summe ergibt. Wie viele Summanden müssen addiert werden?	
6.) Zeige, dass $n^5 + n^2 - n - 1$ für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ eine Primzahl darstellt.	
7.) Zeige, dass die Gleichung $\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$ für beliebige reelle Zahlen a, p, q mit $a \neq 0$ und $p \neq q$ zwei verschiedene reelle Lösungen besitzt.	Herman/Kucera: Equations & inequalities S26
8.) Beweise: $\sum_{k=1}^{m} \frac{k(k-3)}{2} = \frac{m}{6}(m^2 - 3m - 4)$	
9.) Zeige: Wenn $2^n - 1$ eine Primzahl ist, so ist n auch eine Primzahl.	
10.) a) Löse mittels Substitution $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} = 2x + 9$ b) Löse die Ungleichung $\frac{4x^2}{(1-\sqrt{1+2x})^2} < 2x + 9$	