# 50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs (A) „Mathematik macht Freu(n)de“ 5. Oktober 2018

Sei $m$ eine natürliche Zahl größer als 1. Dann nennen wir die Menge aller ganzen Zahlen, die bei Division durch $m$ den Rest $r$ haben **„ Restklasse r modulo m ”**.
Z.B. sind die geraden Zahlen die Restklasse 0 modulo 2 und die ungeraden Zahlen die Restklasse 1 modulo 2.
Z.B. ist die Restklasse 3 modulo 4 die Menge $\{\ \dots, -5, -1, 3, 7, 11, \dots\}$
Modulo $m$ gibt es $m$ verschiedene Restklassen, die üblicherweise nach dem Rest benannt werden, also die Restklassen $0, 1, 2, \dots, m-1$.
Wenn zwei ganze Zahlen $a$ und $b$ in der selben Restklasse modulo $m$ liegen, so schreiben wir $a \equiv b$ mod. $m$ ( **„a ist kongruent b modulo m.”**)
Es gilt: $a \equiv b$ mod. $m$ genau dann, wenn $a - b$ durch $m$ teilbar ist.
Es gilt: $a \equiv b$ mod. $m$ genau dann, wenn es eine ganze Zahl $t$ gibt, sodass $a = b + t \cdot m$ gilt.
Es gilt: Aus $a \equiv b$ mod. $m$ und $b \equiv c$ mod. $m$ folgt $a \equiv c$ mod. $m$.
Es gilt: Aus $a \equiv b$ mod. $m$ und $c \equiv d$ mod. $m$ folgt $a + c \equiv b + d$ mod. $m$, $a - c \equiv b - d$ mod. $m$ und $a \cdot c \equiv b \cdot d$ mod. $m$.
Es gilt: Aus $a \cdot c \equiv b \cdot c$ mod. $m$ und $ggT(c, m) = 1$ folgt $a \equiv b$ mod. $m$.

1. Man bestimme die Einerziffer und die Zehnerziffer von $2019^{2019}$.

2. Man beweise, dass die Zahlen $2019^2$ und $7981^2$ in den letzten vier Stellen übereinstimmen.

3. Man beweise, dass $6^{2n+1} + 5^{n+2}$ für alle natürlichen Zahlen $n$ durch 31 teilbar ist.

4. Unter einem „quadratischen Rest modulo m” versteht man einen Rest $r$ mod. $m$, sodass die Kongruenz $x^2 \equiv r$ mod. $m$ eine Lösung hat. Man bestimme alle quadratischen Reste modulo a) 3, b) 4, c) 5, d) 8 und e) 10.

5. Man beweise, dass die Gleichungen $x^2+y^2 = 2019$ und $x^2-y^2 = 2018$ keine ganzzahligen Lösungen haben.

6. Man beweise, dass es keine ganzen Zahlen $x$ und $y$ gibt, sodass $\frac{x^2y^2+1}{3(x+y)}$ eine ganze Zahl ist.

7. Man beweise, dass die Gleichung $20x^2 + 19y^2 = 2018 \cdot 2019$ keine ganzzahligen Lösungen hat.