



50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“

8. März 2019

1. Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC mit dem Höhenschnittpunkt H . Weiters seien D, E und F die Fußpunkte der Höhen h_a, h_b und h_c . Zeige, dass H der Inkreismitelpunkt des Dreiecks DEF ist.
2. s sei $ABCDE$ ein konvexes Fünfeck, mit der Eigenschaft, dass $BCDE$ ein Quadrat ist und dass $\angle BAE = 90^\circ$. Der Diagonalschnittpunkt des Quadrats werde mit O bezeichnet. Zeige, dass AO den Winkel $\angle BAE$ halbiert!
3. Man zeige: Wenn man die Seitenmittelpunkte eines konvexen Vierecks verbindet, entsteht ein Parallelogramm. (Dieses wird auch Varignon-Parallelogramm genannt.) Man zeige weiters, dass dieses Parallelogramm genau die Hälfte der Fläche des Vierecks bedeckt.

4. Man zeige für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ mit $x^2 + y^2 = 1$, dass folgende Ungleichung gilt:

$$x^3 + y^2 \geq \sqrt{xy}.$$

5. Man zeige für alle $a, b \in \mathbb{R}^+$ mit $a + b + c = 1$, dass folgende Ungleichung gilt:

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 \geq 4(ab + bc + ca).$$

6. Es seien a, b und c positive reelle Zahlen. Man beweise:

$$\frac{a}{c} + \frac{c}{b} \geq \frac{4a}{a+b}.$$

Wann gilt Gleichheit? (LWA 2018, Walther Janous)

7. Für die positiven reellen Zahlen x und y gilt die Bedingung $xy = 4$. Man beweise, die Ungleichung (LWA 2015, Walther Janous)

$$\frac{1}{x+3} + \frac{1}{y+3} \leq \frac{2}{5}.$$

8. Zwei Kreise k_1, k_2 schneiden einander in den Punkten P, Q . Eine Gerade g schneidet k_1, k_2 in den Punkten A, B, C, D (in dieser Reihenfolge). Zeige: $\angle APB = \angle CQD$.
9. Im spitzwinkligen Dreieck ABC ist E der Fußpunkt der Normalen durch B auf AC . Die Gerade t ist die Tangente an den Umkreis des Dreiecks ABC in B . Der Fußpunkt der Normalen durch C auf t ist F . Zeige: EF ist parallel zu AB .
10. Man zeige: In einem Trapez, in dem die Diagonalen aufeinander normal stehen, gilt immer $(a+c)^2 = e^2 + f^2$, wobei a und c die beiden parallelen Seiten des Trapezes und e und f die Diagonalen sind.