50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 21. Dezember 2018

1. Ein Viereck $ABCD$ hat genau dann einen Umkreis, wenn gegenüberliegende Winkel supplementär sind.

   Ein Viereck mit Umkreis heißt **Sehnenviereck.**

2. Es sei ABC ein Dreieck mit dem Inkreismittelpunkt I. Die Berührpunkte des Inkreises mit den Seiten BC, AC und AB seien D, E und F. Der Schnittpunkt von CI mit EF sei P. Beweise, dass die Punkte B, I, P und F auf einem Kreis liegen.

3. Beweise, dass sich in jedem Dreieck jede Winkelsymmetrale mit der Streckensymmetrale der gegenüberliegenden Seite in einem Punkt schneidet, der auf dem Umkreis liegt.(**Südpolsatz.**)

4. Spiegelt man den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks an den Seiten, so liegen die gespiegelten Punkte auf dem Umkreis.

5. Es sei AD die (innere) Winkelsymmetrale durch den Eckpunkt A des Dreiecks ABC mit D auf BC. Auf der Seite AC sei der Punkt E so gewählt dass $\overline{CE} = \overline{CD}$. Die Gerade DE schneidet die Winkelsymmetrale durch B in P.

   Beweise: $\overline{AP} = \overline{PD}$

6. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Zeige die Gerade AG steht normal auf BG.

7. Außerhalb des Quadrates $ABCD$ konstruieren wir über der Seite CD ein rechtwinkeliges Dreieck DCM mit dem rechten Winkel in M.

   Zeige, dass die Winkelsymmetrale in M das Quadrat in zwei kongruente Teile teilt.

8. In einem Rechteck $ABCD$ ist$M$ der Mittelpunkt der Seite AB und $\overline{AB} : \overline{AD} = 2 : 1$. Über der Strecke MD zeichne man ein gleichseitiges Dreieck MDX, derart, dass die Punkte X und A auf verschiedenen Seiten der Geraden MD liegen.

   Bestimme den Winkel $\angle XCD$.

9. Es sei ABC ein Dreieck. Die Mittelpunkte der Seiten BC, AC und AB werden mit D, E bzw. F bezeichnet. Die beiden Schwerlinien AD und BE sollen aufeinander normal stehen und die Längen $\overline{AD} = 18$ und $\overline{BE} = 13;5$ haben.

   Man berechne die Länge der dritten Schwerlinie CF dieses Dreiecks.

   (LWA 2014 - Karl Czakler)