50. Österreichische Mathematik-Olympiade

Vorbereitungskurs „Mathematik macht Freu(n)de“ 22. Februar 2019

1. Über den Seiten AB und BC eines Dreiecks ABC werden nach außen rechtwinkelige gleichschenkelige Dreiecke ABS_1 und BCS_2 errichtet mit AB und BC als Hypothenusen. E sei der Mittelpunkt der Seite AC. Beweise $ES_1 = ES_2$

2. Das Produkt von drei positiven reellen Zahlen sei 1. Die Summe dieser drei Zahlen sei größer als die Summe ihrer Kehrwerte. Beweise, dass genau eine dieser Zahlen größer als 1 ist.

3. Der Inkreis des Dreiecks ABC berührt die Seite BC im Punkt D und die Seite AC in E. Die Winkelsymmetrale des Winkels $\angle ABC = \beta$ schneidet die Gerade DE im Punkt G.

   Bestimme den Winkel $\angle AGB$!

4. Es sei ABCD ein Rechteck mit $AB \neq BC$ und dem Mittelpunkt O. Die Normale durch O zu BD schneidet die Gerade AB in E und die Gerade BC in F. Der Mittelpunkt der Strecke CD sei M, der Mittelpunkt der Strecke AD sei N.

   Beweise: FM steht normal zu EN.

5. Beweise. dass für alle positiven reellen Zahlen gilt:
$$\sqrt{a+b} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+4b}$$

6. Halbiert in einem nicht gleichschenkeligen Dreieck die Winkelsymmetrale w_γ den Winkel zwischen der Höhe h_c und der Schwerlinie s_c, so ist das Dreieck rechtwinkelig!

7. Es seien a und b reelle Zahlen mit $ab = 1$. Man bestimme die größte Zahl C, sodass
$$(a-2)^2 + (b-2)^2 \geq C$$

   (Walther Janous)

8. Zeige, dass für alle reellen Zahlen a gilt: $3(1 + a^2 + a^4) \geq (1 + a + a^2)^2$

9. Es seien x, y nicht negative reelle Zahlen. Man zeige: $(x + y^3)(x^3 + y) \geq 4x^2y^2$. Wann gilt Gleichheit?

10. Es sei ABC ein Dreieck mit $AC > AB$ und dem Umkreismittelpunkt U. Die Tangenten an den Umkreis in den Punkten A und B schneiden einander im Punkt T. Die Symmetrale der Seite BC schneidet die Seite AC im Punkt S. Man zeige:

    (a) Die Punkte A, B, S, T und U liegen auf einem Kreis.

    (b) Die Gerade ST ist parallel zur Seite BC.

    (K. Czakler)